

OPERATIONS RESEARCH **(RISET OPERASI)**

ASTUTI MEFLINDA, SE, MM
MAHYARNI, SE, MM

Operations Research
(Riset Operasi)

Undang-Undang Nomor 19 Tahun 2002, tentang Hak Cipta

PASAL 2

- (1) Hak Cipta merupakan hak eksklusif bagi Pencipta atau Pemegang Hak Cipta untuk mengumumkan atau memperbanyak ciptaannya, yang timbul secara otomatis setelah suatu ciptaan dilahirkan tanpa mengurangi pembatasan menurut perundang-undangan yang berlaku.

PASAL 72

- (1) Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau Pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp 1.000.000,00 (Satu Juta Rupiah), atau paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp5.000.000.000,00 (Lima Miliar Rupiah).
- (2) Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu Ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Operations Research (Riset Operasi)

ASTUTI MEFLINDA, SE, MM
MAHYARNI, SE, MM

Penerbit
UR PRESS Pekanbaru
2011

Judul : Operations Research (Riset Operasi)
Penulis : Astuti Meflinda, SE, MM, Mahyarni, SE, MM

Sampul dan Tata Letak : UR Press
Diterbitkan Oleh **UNRI PRESS**, Juli 2011

Alamat Penerbit
Badan Penerbit Universitas Riau
UNRI PRESS Jl. Pattimura No. 9, Gobah Pekanbaru 28132,
Riau, Indonesia
Telp. (0761) 22961, Fax. (0761) 857397
e-mail: unri_perss@yahoo.co.id
ANGGOTA IKAPI

Hak Cipta dilindungi Undang-undang
Dilarang mengutip atau memperbanyak
sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari
penerbit

Isi di luar tanggung jawab percetakan

Cetakan Pertama : Juli 2011

Perpustakaan Nasional RI: Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Meflinda, Astuti
Operations Research (Riset Operasi) / Astuti Meflinda,
SE, MM, Mahyarni, SE, MM.--Pekanbaru : UR Press,
2011
114 + viii hlm. ; 15,5 x 23 cm

ISBN 978-979-792-266-7

I. Judul

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji dan syukur kehadiran Allah SWT karena dengan petunjukNya penulisan buku dengan judul *Operation Research* (Riset Operasi) ini telah dapat terlaksana dengan lancar sampai terwujud dalam bentuk buku ini.

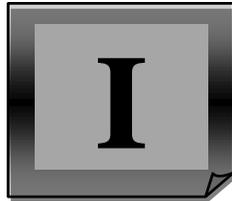
Penulisan buku *Operation Research* (Riset Operasi) ini sebenarnya merupakan pengalaman yang sangat menarik dan berharga bagi penulis karena dengan penulisan buku ini membuat penulis semakin gemar membaca dan lebih tertarik melihat perkembangan *Operation Research* (Riset Operasi) di masa yang akan datang. Oleh karena itu diharapkan buku ini dapat memberikan manfaat bagi mahasiswa dalam mempermudah memahami mata kuliah *Operation Research* (Riset Operasi) dan masalah lain yang berkaitan dengan *Operation Research* (Riset Operasi).

Pada kesempatan ini penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Departemen Agama dan Bapak Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau yang telah memberikan kepercayaan kepada kami untuk menyelesaikan penulisan buku ini. Disamping itu penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada pihak – pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penulisan buku ini.

Akhirnya dengan mengucap syukur yang sedalam-dalamnya atas terwujudnya buku ini, penulis juga mengharapkan saran dan kritik demi kesempurnaan buku ini di masa mendatang.

Pekanbaru, Juli 2011
Penulis

BAB



**OPERATION RESEARCH
PENDAHULUAN**

1



OPERATIONS RESEARCH PENDAHULUAN

A. SEJARAH *OPERATIONS RESEARCH*

Operations Research (Riset Operasi) pertama kali diperkenalkan di Inggris sebagai hasil studi operasi militer selama Perang Dunia II. Pada tahun 1939, G.A. Robert dan E.C. William adalah yang pertama kali mengembangkan radar yang merupakan alat baru bagi peringatan dini menghadapi serangan udara. Pada awal perang, pemimpin militer Inggris memanggil sekelompok ahli sipil dari berbagai disiplin dan mengkoordinasikan mereka kedalam suatu kelompok yang disertai tugas mencari cara-cara yang efisien dalam menggunakan alat yang baru ditemukan tersebut.

Dalam tahun 1942, angkatan udara Amerika Serikat membentuk Divisi Operations Analysis, kemudian diikuti oleh angkatan laut yang membentuk kelompok riset operasi pada tahun 1943. Kelompok ahli Inggris ini dan kelompok-kelompok lain berikutnya menjadi dasar untuk kegiatan riset (*research*) pada operasi-operasi militer.

Keberhasilan kelompok-kelompok penelitian operasi dibidang militer semasa PD II menarik perhatian para industriawan pada bidang ini. Pertumbuhan industry yang pesat menyebabkan

team-team riset operasi sangat dibutuhkan dalam dunia bisnis, karena masalah-masalah yang timbul pada dasarnya sama walaupun konteksnya berbeda dengan yang dihadapi kalangan militer. Memasuki tahun 1950-an kegiatan riset operasi telah berkembang cepat di dunia bisnis, pemerintahan, dan lembaga swasta. Selama periode ini, teknik-teknik program linear dan dinamik telah ditemukan dan dikembangkan. Perkembangan besar terjadi dalam penelitian tentang masalah persediaan produksi dan antri. Sejak saat itu, riset operasi mulai mendapat pengakuan sebagai pelajaran yang bermanfaat di Universitas, terutama bagi mahasiswa ekonomi, administrasi, dan teknik.

B. DEFINISI OPERATIONS RESEARCH (RISET OPERASI)

Secara umum pengertian *research* (riset) dapat diartikan sebagai suatu proses yang terorganisasi dalam mencari kebenaran akan masalah. Sedangkan kata *operations* (operasi) didefinisikan sebagai tindakan-tindakan yang diterapkan pada beberapa masalah. Dalam kenyataannya sangat sulit untuk mendefinisikan riset operasi secara tegas karena batas-batasnya tidak jelas. Riset Operasi telah banyak didefinisikan oleh para ahli, namun hanya beberapa yang bias digunakan dan diterima secara umum.

Morse dan *Kimball* (1951), mendefinisikan Riset Operasi sebagai metode ilmiah yang memungkinkan para manajer mengambil keputusan mengenai kegiatan yang mereka tangani dengan dasar kuantitatif. Sedangkan *Churchman*, *Arkoff* dan *Arnoff* (1957) mengemukakan pengertian riset operasi sebagai aplikasi

metode-metode, teknik-teknik, dan peralatan-peralatan ilmiah dalam menghadapi masalah-masalah yang timbul didalam operasi perusahaan dengan tujuan ditemukannya pemecahan yang optimum masalah-masalah tersebut.

Miller dan M.K. Star (1960) mengartikan Riset Operasi sebagai peralatan manajemen yang menyatukan ilmu pengetahuan, matematika, dan logika dalam kerangka pemecahan masalah-masalah yang dihadapi sehari-hari, sehingga akhirnya permasalahan tersebut dapat dipecahkan secara optimal.

Dari definisi diatas dapat disimpulkan bahwa Riset Operasi berkenaan dengan pengambilan keputusan optimal dalam penyusunan model dari sistem-sistem baik deterministic maupun probabilistic yang berasal dari kehidupan nyata. Aplikasi-aplikasi ini, yang terjadi dalam pemerintah, bisnis, teknik, ekonomi, serta ilmu pengetahuan alam dan social ditandai dengan kebutuhan untuk mengalokasikan sumberdaya-sumberdaya yang terbatas.

C. KEGUNAAN OPERATIONS RESEARCH

Operation Research sangat berguna dalam menghadapi masalah-masalah, bagaimana mengarahkan dan mengkoordinasikan operasi-operasi atau kegiatan-kegiatan dalam suatu organisasi dengan segala keterbatasannya melalui prosedur “*search for optimality*”.

D. MODEL-MODEL DALAM OPERATIONS RESEARCH

Model adalah abstraksi atau penyederhanaan realita sistem yang kompleks dimana hanya komponen-komponen yang relevan

atau faktor-faktor yang dominan dari masalah yang dianalisis dan diikutsertakan. Banyak model *Operations Research* yang sudah dikembangkan dan digunakan terhadap persoalan-persoalan bidang usaha. Model tersebut dapat dikelompokkan ke dalam beberapa jenis, yaitu:

1. Linear Programming

Program ini memuat metode grafik, simpleks, dan dualitas yang digunakan pada proses alokasi. Program ini akan menjawab persoalan bila:

- a. Terdapat sejumlah kegiatan untuk dilaksanakan dan terdapat alternative cara untuk melaksanakannya.
- b. Sumber dan fasilitas tidak tersedia untuk melaksanakan tiap kegiatan dengan cara yang paling efektif.

Persoalan ialah menggabungkan kegiatan dan sumber sedemikian rupa hingga terdapat efektivitas keseluruhan secara maksimal.

2. Metode Transportasi

Persoalan ini merupakan bahagian khusus dari proses alokasi. Metode ini mempunyai cara tersendiri untuk menjawab persoalan alokasi seperti cara bantu loncatan (metode *stepping stone*), cara MODI, dan cara pendekatan Vogel's.

3. Metode Penugasan

Model ini berhubungan dengan penugasan optimal dari bermacam-macam sumber yang produktif atau personalia yang

mempunyai tingkat efisiensi yang berbeda-beda untuk tugas-tugas yang berbeda pula.

4. Teori Network

Teori network memuat persoalan-persoalan serta pemecahan dari proyek manajemen yang menyangkut perencanaan serta penjadwalan. Alat yang digunakan adalah CPM dan PERT.

5. Teori Keputusan

Ciri penting dari teori keputusan adalah bahwa akibat dari tindakan, umumnya tidak diketahui. Dalam hal ini, peluang dihubungkan dengan bermacam-macam keadaan. Kita dapat menunjuk keputusan tentang kepastian, resiko dan ketidakpastian, tergantung pada seberapa banyak kita mengetahui keadaan. Cara lain untuk menaksir masa depan meski hanya tersedia sejumlah kecil informasi adalah dengan statistik Bayes.

6. Teori Permainan

Teori permainan ini memberikan rangka konsepsi dalam mana persoalan kompetisi dapat dirumuskan. Teori ini telah dipergunakan secara efektif oleh dunia usaha untuk mengembangkan strategi periklanan, kebijakan harga, dan waktu pengenalan produksi baru.

7. Teori Antrian

Antrian atau sering juga disebut dengan teori garis tunggu berkenaan dengan pertibaan acak atau tetap pada suatu fasilitas pelayanan dengan kapasitas terbatas. Tujuan dari model ini adalah

memungkinkan seseorang untuk menentukan jumlah optimum dari orang atau fasilitas yang diperlukan untuk melayani pelanggan dengan memperhatikan biaya pelayanan dan biaya tunggu.

8. Teori Penggantian

Teori penggantian akan membahas persoalan penggantian alat yang tua disebabkan karena usia dan juga penggantian disebabkan karena kebijakan penggantian pada waktu-waktu yang sudah tertentu dan tetap, baik karena pemakaian yang terus-menerus maupun tidak dalam suatu kurun waktu. Kebijakan penggantian ini ditujukan untuk mencapai jumlah biaya yang sekecil-kecilnya (minimum). Disamping itu teori penggantian juga membahas persoalan penggantian alat yang disebabkan kerusakan yang mendadak, misalnya karena sesuatu benturan sehingga alat tidak dapat digunakan sama sekali.

E. FORMULASI PERSOALAN

Ada berbagai pendekatan berbeda yang dapat dipergunakan didalam memformulasikan persoalan.

Tetapi secara umum dalam mempelajari riset operasi ada beberapa tahapan utama yang perlu diperhatikan, yaitu:

1. Merumuskan masalah yang akan dipecahkan sesuai dengan tujuan yang hendak dicapai berdasarkan keadaan obyektif. Untuk itu perlu diperhatikan 3 (tiga) hal: *Pertama*, uraian yang tepat mengenai tujuan yang akan dicapai. *Kedua*, identifikasi berbagai alternatif dalam keputusan yang menyangkut suatu sistem. *Ketiga*, mengenali adanya kendala-kendala (*constraints*)

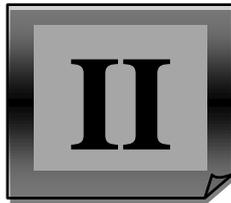
dan juga persyaratan-persyaratan yang diperlukan oleh system berkaitan dengan pemecahan masalah.

2. Pembentukan model yang paling cocok untuk mewakili sistem. Model matematis yang sering digunakan adalah persamaan dan ketidaksamaan linear seperti dalam *Linear Programming* (LP). Suatu model ada kalanya cukup diselesaikan dengan metode yang sudah baku seperti simpleks dalam pemecahan LP, atau karena kompleksnya model harus menggunakan kombinasi model matematis, simulasi, dan lain-lain.
3. Pemecahan masalah, biasanya berkenaan dengan pemecahan masalah persamaan/ ketidaksamaan matematis. Dalam model matematis, penyelesaian masalah dicapai dengan teknik optimasi, dan model menghasilkan suatu pemecahan optimum. Sedangkan pada model simulasi, hasil pemecahan hanya merupakan pendekatan terhadap pemecahan optimum. Adakalanya parameter suatu sistem yang akan dipecahkan mengalami perubahan, untuk itu dipergunakan analisis kepekaan (*Sensitivity Analysis*).
4. Validasi atau pengujian model. Suatu model dinyatakan valid (sahih) apabila dapat memberikan prediksi yang dapat dipercaya dari hasil proses suatu sistem, disamping diakui adanya ketidaktepatan model tersebut untuk mewakili keadaan yang sebenarnya. Metode yang biasa digunakan untuk menguji

validitas model adalah membandingkan performannya dengan data masa lalu yang tersedia.

5. Implementasi hasil pemecahan model yang telah diuji validitasnya. Implementasi ini pada dasarnya meliputi penerjemahan dari hasil pengujian model kedalam bentuk instruksi-instruksi yang sifatnya operasional praktis yang mudah dimengerti oleh para individu yang mengadministrasikan dan mengoperasikan sistem yang akan dipecahkan. Dalam tahap ini harus ada kerjasama yang baik antara ahli riset operasi (sebagai pembentuk model) dengan mereka yang bertanggungjawab terhadap pelaksanaan sistem.

BAB



**LINEAR
PROGRAMMING**



LINEAR PROGRAMMING

A. DEFINISI *LINEAR PROGRAMMING*

Linear Programming merupakan salah satu pendekatan matematik yang paling sering diterapkan manajerial dalam pengambilan keputusan. Tujuan dari penggunaan *linear programming* adalah untuk menyusun suatu model yang dapat dipergunakan untuk membantu pengambilan keputusan dalam menentukan alokasi yang optimal dari sumber daya perusahaan ke berbagai alternatif.

Penggunaan *linear programming* dalam hal ini adalah mengalokasikan sumber daya tersebut, sehingga laba akan maksimum atau alternatif biaya minimum. Alokasi yang dibuat tergantung dari sumber daya yang tersedia dan permintaan atas sumber daya tersebut. Sedangkan tujuan dari alokasi adalah memaksimumkan laba atau meminimalkan biaya.

Jadi *linear programming* adalah sebuah metode matematis yang berkarakteristik linear untuk menemukan suatu penyelesaian optimal dengan cara memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan terhadap satu susunan kendala.

B. MODEL *LINEAR PROGRAMMING*

Model *linear programming* merupakan bentuk dan susunan dalam menyajikan masalah-masalah yang akan dipecahkan dengan teknik *Linear Programming* (LP).

Model LP mempunyai tiga unsur utama, yaitu:

1. Variabel keputusan yaitu variabel persoalan yang akan mempengaruhi nilai tujuan yang hendak dicapai. Didalam proses pemodelan, penemuan variabel keputusan harus dilakukan terlebih dahulu sebelum merumuskan fungsi tujuan dan fungsi batasan (kendala-kendalanya). Misalnya dengan mengajukan pertanyaan: keputusan apa yang harus dibuat agar nilai fungsi tujuan menjadi maksimum atau minimum.
2. Fungsi tujuan yaitu fungsi yang menggambarkan tujuan dalam permasalahan LP yang berkaitan dengan pengaturan secara optimal sumber daya - sumber daya, untuk memperoleh keuntungan maksimal atau biaya minimum. Dengan simbol Z . Oleh karena itu hanya ada dua kemungkinan fungsi tujuan, yaitu
 - a. Maksimalkan $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$
 - b. Minimumkan $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$
3. Fungsi batasan (kendala) yaitu bentuk penyajian secara matematis batasan-batasan kapasitas yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimal ke berbagai kegiatan.

Untuk memudahkan pembahasan model Linear Programming ini, digunakan simbol-simbol sebagai berikut:

X_j = banyaknya kegiatan j ($j = 1, 2, \dots, n$). Variabel X_j ini disebut juga dengan variabel keputusan (*decision variables*)

Z = nilai fungsi tujuan yang dioptimalkan (maksimum atau minimum)

C_j = kenaikan nilai Z apabila ada pertambahan tingkat kegiatan (X_j) dengan satu satuan (unit) atau merupakan keuntungan per unit (masalah maksimasi), biaya per unit (masalah minimasi) kegiatan j terhadap nilai Z .

a_{ij} = banyaknya sumber i yang di perlukan guna menghasilkan setiap unit output kegiatan j ($i = 1, 2, \dots, m$, dan $j = 1, 2, \dots, n$)

b_i = banyaknya sumber (fasilitas) i yang tersedia untuk dialokasikan ke setiap unit kegiatan ($i = 1, 2, \dots, m$)

Keseluruhan simbol-simbol diatas selanjutnya disusun ke dalam bentuk tabel standar Linear Programming, seperti pada Tabel 2.1 di bawah ini:

Tabel 2.1. Data Model Linear Programming

Kegiatan Sumber	Pemakaian sumber per unit					Kapasitas Sumber
	1	2	3	n		
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1n}		b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2n}		b_2
.
.
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mn}		b_m
<i>ΔZ per unit</i>	C_1	C_2	C_3	C_n		
Banyak kegiatan	X_1	X_2	X_3	X_n		

Atas dasar Tabel 2.1 di atas, dapat disusun model standard *Linear Programming* sebagai berikut:

Fungsi tujuan :

Maksimumkan/minimumkan:

$$Z = \sum C_j \cdot X_j = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

Dengan kendala atau batasan:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j (\leq, =, \geq) b_i \text{ untuk semua nilai } i (i = 1, 2, \dots, m)$$

Atau:

1. $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n (\leq, =, \geq) b_1$
2. $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n (\leq, =, \geq) b_2$
- ⋮
- ⋮
- m. $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n (\leq, =, \geq) b_m$

dan

$$X_j \geq 0 \text{ atau } X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_n \geq 0$$

- *Batasan pertama* artinya: jumlah hasil (barang/jasa) 1 yang dihasilkan oleh kegiatan 1 dikalikan dengan kebutuhan akan sumber 1 per satuan (berarti total alokasi 1 untuk kegiatan 1) ditambah dengan hasil kegiatan 2 dikalikan dengan kebutuhan tiap satuan keluaran 2 terhadap sumber 1 (dan seterusnya sampai dengan kegiatan ke-n) tidak akan melebihi atau sama dengan atau tidak boleh kurang dari jumlah (kapasitas) tersedianya sumber 1 (yang dinyatakan dengan b_1). Hal ini berlaku untuk batasan-batasan lainnya sampai ke m.
- Fungsi-fungsi batasan dapat di kelompokkan menjadi 2 macam, yaitu:

1. *Fungsi batasan fungsional*, adalah fungsi-fungsi batasan sebanyak m yaitu $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n$
2. *Fungsi batasan non negatif (non negative constraints)* yaitu fungsi-fungsi batasan yang dinyatakan dengan

$$X_i \geq 0$$
 - Variabel X_j disebut sebagai variabel keputusan (*decision variables*)
 - a_{ij} , b_i , C_j , yaitu masukan-masukan input konstan, disebut sebagai parameter model.

C. METODE PEMECAHAN MODEL LINEAR PROGRAMMING

Ada 2 (dua) metode/pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan Linear Programming (LP), yaitu dengan metode grafis dan dengan metode simpleks. Bila persoalan LP hanya mempunyai 2 (dua) variabel keputusan, maka dua metode tersebut dapat dipergunakan. Bila variabel yang terlibat dalam penyelesaian LP lebih dari dua, maka metode grafis tidak dapat dipergunakan lagi.

Metode yang lazim diterapkan untuk memecahkan persoalan LP yang mempunyai variabel keputusan lebih dari dua adalah metode simpleks. Melalui metode simpleks, kombinasi variabel keputusan optimal diselesaikan dengan menggunakan pendekatan matematis.

1. Metode Grafis

a. Persoalan Maksimasi

- Untuk memaksimumkan laba
- Fungsi batasan bertanda \leq
- Daerah *feasible* akan berada disebelah kiri bawah garis batas tersebut

Contoh :

Perusahaan sepatu IDEAL membuat 2 model sepatu. Model pertama merek A dengan sol dari karet, dan model ke-dua merek B dengan sol dari kulit. Untuk membuat sepatu-sepatu itu, perusahaan memiliki tiga macam mesin. Mesin 1 khusus membuat sol dari karet, mesin 2 khusus membuat sol dari kulit, dan mesin 3 membuat bagian atas sepatu dan melakukan assembling bagian atas dengan sol. Setiap lusin sepatu merek A mula-mula dikerjakan mesin 1 selama 2 jam, kemudian tanpa melalui mesin 2 terus dikerjakan di mesin 3 selama 6 jam. Sedangkan untuk sepatu merek B tidak diproses di mesin 1, tetapi pertama kali dikerjakan di mesin 2 selama 3 jam, kemudian di mesin 3 selama 5 jam. Jam kerja maksimum setiap hari untuk untuk mesin 1 = 8 jqm, mesin 2 = 15 jam, dan mesin 3 = 30 jam. Sumbangan terhadap laba untuk setiap lusin sepatu merek A = Rp 30.000, sedangkan untuk setiap lusin sepatu merek B = Rp 50.000. Berapa lusin sebaiknya sepatu merek A dan merek B yang di buat agar bias memaksimumkan laba.

Data diatas dapat disusun ke dalam Tabel 2.2 berikut ini:

Tabel 2.2. Data Model *Linear Programming*

Mesin \ Merek	Jenis Produksi		Kapasitas Sumber
	A	B	
1	2	0	8
2	0	3	15
3	6	5	30
Sumbangan terhadap Laba (Rp. 10.000)	3	5	

Langkah-langkah penyelesaian:

1) Memformulasikan fungsi tujuan dan fungsi kendala (batasan) dalam bentuk matematis.

- Fungsi tujuan

Maksimumkan $Z = 3X_1 + 5X_2$

- Dengan batasan (1) $2X_1 \leq 8$

(kendala) (2) $3X_2 \leq 15$

(3) $6X_1 + 5X_2 \leq 30$

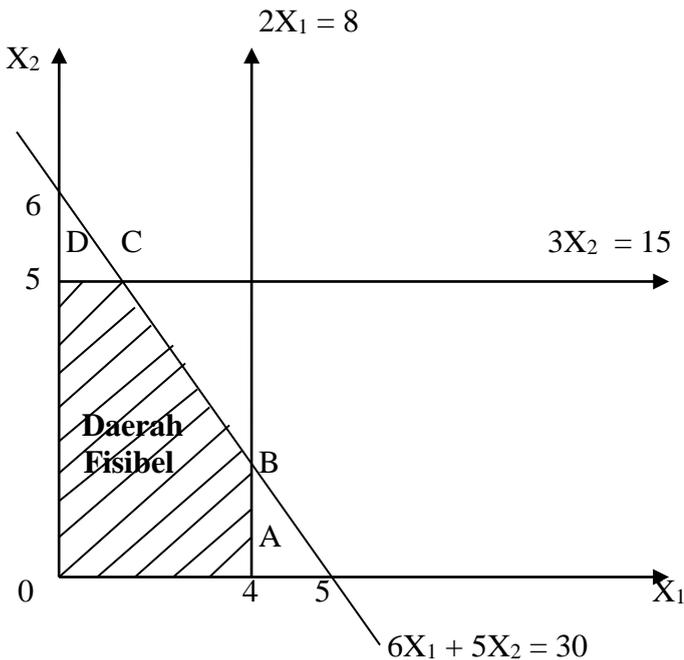
Batasan non negatif: $X_1, X_2 \geq 0$

Tiga (3) pertidaksamaan diatas disebut batasan teknis (*technical constraints*) yang ditentukan oleh keadaan teknologi dan tersedianya input. Dan batasan non negatif (*non negative constraint*) ditetapkan untuk menghindari nilai negatif (yang tidak dapat diterima) dalam penyelesaian persoalan.

2) Robah ketiga fungsi batasan ketidaksamaan menjadi kesamaan (=). Selesaikan masing-masing variabel X_1 dan X_2 dengan menetapkan salah satu variabel = 0.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 2X_1 &= 8 && \longrightarrow && X_1 = 4 \\
 (2) \quad 3X_2 &= 15 && \longrightarrow && X_2 = 5 \\
 (3) \quad 6X_1 + 5X_2 &= 30 \\
 X_1 = 0 &\longrightarrow 5X_2 = 30 && \longrightarrow && X_2 = 6 \\
 X_2 = 0 &\longrightarrow 6X_1 = 30 && \longrightarrow && X_1 = 5
 \end{aligned}$$

3) Gambarkan masing-masing fungsi batasan dalam suatu sistem sumbu. Grafik dari ketidaksamaan \leq mencakup semua titik – titik yang memenuhi fungsi batasan, yaitu semua titik pada garis dan disebelah kiri bawah garis batas tersebut.



- 4) Tentukan daerah *feasible* untuk X_1 dan X_2 (diarsir), yaitu daerah yang memuat semua titik-titik yang memenuhi ketiga batasan ditambah batasan non negatif.

Daerah feasible dari soal di atas adalah OABCD (daerah yang di arsir)

- 5) Tentukan solusi optimal, yaitu suatu titik singgung nilai fungsi tujuan dengan daerah feasible yang terjauh dari titik nol.

Solusi optimal untuk soal diatas adalah pada titik C yaitu perpotongan antara garis DC dengan garis BC.

- 6) Eliminasi dan substitusikan, sehingga diperoleh nilai X_1 dan X_2 . Dan nilai tersebut disubstitusikan ke fungsi tujuan (Z).

$$\begin{array}{rcl}
 3X_2 & = & 15 \quad \left| \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right| \\
 6X_1 + 5X_2 & = & 30 \quad \left| \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right| \\
 \hline
 & & 15X_2 = 75 \\
 & & 18X_1 + 5X_2 = 90 \\
 \hline
 & & -18X_1 = -15 \\
 & & X_1 = 18/18 = 5/6
 \end{array}$$

$$6X_1 + 5X_2 = 30$$

$$6(5/6) + 5X_2 = 30$$

$$5 + 5X_2 = 30 \longrightarrow 5X_2 = 25 \longrightarrow X_2 = 5$$

Sehingga diperoleh harga $X_1 = 5/6$ dan $X_2 = 5$, kemudian substitusikan kedalam fungsi tujuan:

$$Z = 3X_1 + 5X_2 = 3(5/6) + 5(5) = 2,5 + 25 = 27,5$$

Dengan demikian, solusi optimum dari soal diatas adalah perusahaan harus membuat sepatu merek A sebanyak $5/6$ lusin dan merek B sebanyak 5 lusin setiap hari dengan keuntungan sebesar Rp 275.000 ($27,5 \times \text{Rp } 10.000$)

Cara lain untuk menentukan solusi optimal adalah dengan membandingkan nilai Z yang diperoleh pada berbagai titik X_1 dan X_2 di daerah fisibel. Nilai Z makin besar bila makin jauh dari titik origin (0). Untuk itu yang dibandingkan sebaiknya adalah titik-titik yang ada di sudut-sudut daerah *feasible*, yaitu titik 0, A, B, C, dan D.

Titik O \rightarrow Pada titik ini $X_1 = 0, X_2 = 0$, sehingga $Z = 0$

Titik A \rightarrow Pada titik ini $X_1 = 4$ dan $X_2 = 0$, sehingga $Z = 12$

Titik B \rightarrow Pada titik ini $X_1 = 4$.

$$6(4) + 5X_2 = 30; X_2 = (30 - 24)/5 = 6/5.$$

$$\text{Sehingga } Z = 18$$

Titik C \rightarrow Pada titik ini $X_2 = 5$

$$6X_1 + 5(5) = 30; X_1 = (30 - 25)/6 = 5/6$$

$$\text{Sehingga } Z = 27,5$$

Titik D \rightarrow Pada titik ini $X_1 = 5$ dan $X_2 = 0$, sehingga $Z = 30$

Diantara ke-lima alternatif diatas, nilai Z terbesar adalah pada titik C, yaitu sebesar 27,5. Titik ini merupakan titik optimal, dengan $X_1 = 5/6$ lusin dan $X_2 = 5$ lusin, dengan keuntungan sebesar Rp 275.000.

b. Persoalan Minimasi

- Untuk meminimalkan biaya
- Fungsi batasan bertanda \geq
- Daerah *feasible* akan berada disebelah kanan atas garis batas tersebut

Contoh:

PT. Asia Automotif memproduksi 2 jenis mobil, yaitu mobil sedan dan truk. Untuk dapat meraih konsumen berpenghasilan tinggi, perusahaan ini memutuskan untuk melakukan promosi dalam 2 macam acara TV, yaitu pada acara hiburan dan acara olahraga. Promosi pada acara hiburan akan disaksikan oleh 7 juta pemirsa wanita dan 2 juta pemirsa laki-laki. Promosi pada acara olahraga akan disaksikan oleh 2 juta pemirsa wanita dan 12 juta pemirsa laki-laki. Biaya promosi pada acara hiburan adalah Rp 5 juta per menit, sedangkan pada acara olahraga biayanya 10 juta per menit. Jika perusahaan menginginkan promosinya disaksikan sedikitnya oleh 28 juta pemirsa wanita dan sedikitnya 24 juta pemirsa laki-laki, bagaimanakah promosi itu sebaiknya?

Data diatas disusun kedalam tabel seperti terlihat pada Tabel 2.3 dibawah ini

Tabel 2.3. Data dari Perusahaan Asia Automotif

Promosi Pemirsa	Jenis Promosi		Jumlah Pemirsa
	H (X ₁)	O (X ₂)	
Wanita	7	2	28
Laki-laki	2	12	24
Biaya Promosi (Rp. Juta)	5	10	

Langkah-langkah penyelesaian:

1) Memformulasikan fungsi tujuan dan fungsi kendala (batasan) dalam bentuk matematis:

- Fungsi tujuan

$$\text{Maksimumkan} \quad Z = 5X_1 + 10X_2$$

- Dengan batasan (1) $7X_1 + 2X_2 \geq 28$

(kendala) (2) $2X_1 + 12X_2 \geq 24$

Batasan non negatif: $X_1, X_2 \geq 0$

2). Robah ketiga fungsi batasan ketidaksamaan menjadi kesamaan (=). Selesaikan masing-masing variabel X_1 dan X_2 dengan menetapkan salah satu variabel = 0.

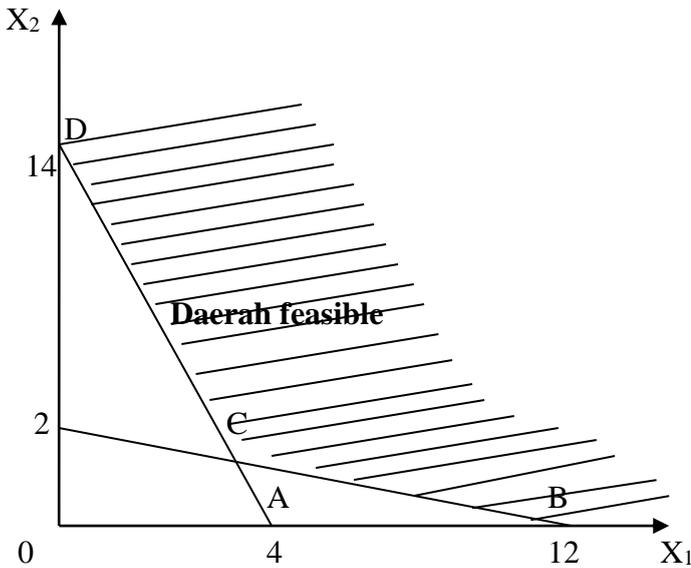
$$(1) \quad 7X_1 + 2X_2 = 28$$

$$X_1 = 0 \longrightarrow 2X_2 = 28 \longrightarrow X_2 = 14$$

$$X_2 = 0 \longrightarrow 7X_1 = 28 \longrightarrow X_1 = 4$$

3) Gambarkan masing-masing fungsi batasan dalam suatu sistem sumbu. Grafik dari ketidaksamaan \geq mencakup semua titik – titik yang memenuhi fungsi batasan, yaitu semua titik pada garis dan disebelah kanan garis batas tersebut.

4) Tentukan daerah *feasible* untuk X_1 dan X_2 (diarsir), yaitu daerah yang memuat semua titik-titik yang memenuhi ketiga batasan ditambah batasan non negatif.



- 5) Tentukan daerah *feasible* untuk X_1 dan X_2 (diarsir), yaitu daerah yang memuat semua titik-titik yang memenuhi ketiga batasan ditambah batasan non negatif.
- 6) Tentukan solusi optimal, yaitu suatu titik singgung nilai fungsi tujuan dengan daerah feasible yang terdekat dengan titik nol. Solusi optimal untuk soal diatas adalah pada titik C yaitu perpotongan antara garis DC dengan garis BC.
- 7) Eliminasi dan substitusikan, sehingga diperoleh nilai X_1 dan X_2 . Dan nilai tersebut disubstitusikan ke fungsi tujuan (Z).

$$\begin{array}{r}
 7X_1 + 2X_2 = 28 \quad | \quad 6 \quad | \quad 42X_1 + 12X_2 = 168 \\
 2X_1 + 12X_2 = 24 \quad | \quad 1 \quad | \quad 2X_1 + 12X_2 = 42 \\
 \hline
 40X_1 \quad \quad = 144 \\
 X_1 \quad \quad = 3,6
 \end{array}$$

$$7X_1 + 2X_2 = 28$$

$$7(3,6) + 2X_2 = 28$$

$$25,2 + 2X_2 = 28 \rightarrow 2X_2 = 2,8 \rightarrow X_2 = 1,4$$

Sehingga diperoleh harga $X_1 = 3,6$ dan $X_2 = 1,4$, kemudian substitusikan kedalam fungsi tujuan:

$$Z = 5X_1 + 10X_2 = 5(3,6) + 10(1,4) = 18 + 14 = 32$$

Keputusannya adalah lama promosi dalam acara hiburan 3,6 menit sedangkan dalam acara olahraga 1,4 menit dengan total biaya Rp 32 juta. Cara lain untuk menentukan solusi optimal adalah dengan membandingkan nilai Z yang diperoleh pada tiap-tiap alternatif.

2. Metode Simpleks

Apabila suatu masalah Linear Programming hanya mengandung 2 variabel keputusan saja (X_1 dan X_2), maka dapat diselesaikan dengan *metode grafik* dan *metode simpleks*. Tetapi apabila melibatkan lebih dari 2 variabel keputusan maka metode grafik tidak dapat digunakan lagi, sehingga diperlukan metode simpleks.

Metode Simpleks yaitu suatu cara yang lazim dipakai untuk menentukan kombinasi optimal dari dua variabel atau lebih, dengan menggunakan tabel-tabel.

a. Masalah Maksimasi (Laba)

Langkah-langkah penyelesaian:

1) Mengubah fungsi tujuan dan batasan-batasan

- Fungsi tujuan diubah menjadi *fungsi implisit* yaitu semuanya bergeser kekiri.

Misalnya: Maksimumkan fungsi tujuan : $Z = 3X_1 + 5X_2$
 maka menjadi : $Z - 3X_1 - 5X_2$

- Batasan-batasan diubah menjadi kesamaan, dengan cara menambah slack variabel. Slack variabel adalah S_1, S_2, \dots, S_n . Jika hasil kegiatan yang ada mewakili X_1 dan X_2 , maka slack variabel dimulai dari S_1, S_2 , dast-nya.

Misalnya: Batasan-batasan (1) $2X_1 \leq 8$
 (2) $3X_2 \leq 15$
 (3) $6X_1 + 5X_2 \leq 30$
 Non negatif $X_1, X_2 \geq 0$

MENJADI :

Batasan-batasan (1) $2X_1 + S_1 = 8$
 (2) $3X_2 + S_2 = 15$
 (3) $6X_1 + 5X_2 + S_3 = 30$
 Non negatif $X_1, X_2 \geq 0$

2) Menyusun persamaan-persamaan didalam Tabel

Tabel 2.4. Metode Simpleks dalam Bentuk Simbol

Variabel Dasar	Z	X_1	$X_2 \dots$	$S_n \dots$	S_1	$X_2 \dots$	S_n	NK
Z	1	$-C_1$	$-C_2 \dots$	$-C_n$	0	$0 \dots$	0	0
S_1	0	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	1	$0 \dots$	0	b_1
S_2	0	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	0	$1 \dots$	0	b_2
	
	
	
S_n	0	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	0	$0 \dots$	1	b_m

NK adalah nilai kanan persamaan (nilai dibelakang tanda =)

Variabel dasar adalah variabel yang nilainya sama dengan sisi kanan persamaan.

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	2	0	1	0	0	8
S ₂	0	0	3	0	1	0	15
S ₃	0	6	5	0	0	1	30

3) Memilih kolom kunci

Pilihlah kolom yang mempunyai nilai pada garis fungsi tujuan yang bernilai negatif dengan angka terbesar, dan berilah tanda segiempat pada kolom tersebut.

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	2	0	1	0	0	8
S ₂	0	0	3	0	1	0	15
S ₃	0	6	5	0	0	1	30

↓
Kolom kunci

3) Memilih baris kunci

- Terlebih dahulu dicari indeks tiap-tiap baris, dengan rumus:

$$\text{Indeks} = \frac{\text{nilaikolomNK}}{\text{nilaikolomkunci}}$$

$$(0/-5, 8/0, 15/3, 30/5) = (0, \sim, 5, 6)$$

- Pilihlah baris yang mempunyai indeks positif dengan angka terkecil.

- Berilah tanda segiempat pada baris kunci tersebut. Nilai yang masuk dalam kolom kunci dan dalam baris kunci disebut *angka kunci*.

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	2	0	1	0	0	8 (8/0 = ~)
S ₂	0	0	3	0	1	0	15 (15/3 = 5)
S ₃	0	6	5	0	0	1	30 30/5 = 6

↓ Angka kunci
 ↓ Baris kunci

5) Mengubah nilai-nilai baris kunci, dengan cara :

Gantilah variabel dasar pada baris tersebut , dengan variabel yang terdapat dibagian atas kolom kunci.

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1						
S ₁	0						
X ₂	0	0	1	0	1/3	0	5
S ₃	0						

Nilai baru baris kunci : (0/3, 3/3, 0/3, 1/3, 0/3; 15/3)

$$= (0, 1, 0, 1/3, 0, 5)$$

6) Mengubah nilai-nilai selain pada baris kunci

Dengan rumus :

Baris baru = Baris lama – (koefisien pada kolom kunci x nilai baru baris kunci)

$$\begin{aligned}
 Z &= (-3 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) - (-5) \cdot (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 5) \\
 &= (-3 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) - (0 \quad -5 \quad 0 \quad -5/3 \quad 0 \quad -25) \\
 &= -3 \quad 0 \quad 0 \quad 5/3 \quad 0 \quad 25
 \end{aligned}$$

$S_1 =$ Baris lama, karena koefisien pada kolom kunci adalah 0.

$$\begin{aligned}
 S_3 &= (6 \ 5 \ 0 \ 0 \ 1 \ 30) - (5) \cdot (0 \ 1 \ 0 \ 1/3 \ 0 \ 5) \\
 &= (6 \ 5 \ 0 \ 0 \ 1 \ 30) - (0 \ 5 \ 0 \ 5/3 \ 0 \ 25) \\
 &= 6 \ 0 \ 0 \ -5/3 \ 1 \ 5
 \end{aligned}$$

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	0	0	5/3	0	25
S ₁	0	2	0	1	0	0	8
X ₂	0	0	1	0	1/3	0	5
S ₃	0	6	0	0	-5/3	1	5

7) Melanjutkan perbaikan-perbaikan

Ulangi langkah ke-3 sampai dengan langkah ke-6. Perubahan baru berhenti setelah pada “baris pertama” (fungsi tujuan) tidak ada yang bernilai negatif. Berarti hasil dari Tabel tersebut sudah merupakan hasil yang optimal.

Variabel Dasar	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	0	0	5/3	0	25
S ₁	0	2	0	1	0	0	8 (8/2 = 4)
X ₂	0	0	1	0	1/3	0	5 (5/0 = ~)
S ₃	0	6	0	0	-5/3	1	5 (5/6)
Z	1						
S ₁	0						
X ₂	0						
X ₁	0	1	0	0	-5/18	1/6	5/6
Z	1	0	0	0	5/6	1/2	271/2
S ₁	0	0	0	1	5/9	-1/3	61/3
X ₂	0	0	1	0	1/3	0	5
X ₁	0	1	0	0	-5/18	1/6	5/6

Baris kunci yang baru = (6/6 0/6 0/6 -5/3/6 1/6 5/6)

$$= (1 \ 0 \ 0 \ -5/18 \ 1/6 \ 5/6)$$

$$\begin{aligned} Z &= (-3 \ 0 \ 0 \ 5/3 \ 0 \ 25) - (-3) \cdot (1 \ 0 \ 0 \ -5/18 \ 1/6 \ 5/6) \\ &= (-3 \ 0 \ 0 \ 5/3 \ 0 \ 25) - (-3 \ 0 \ 0 \ 15/18 \ -3/6 \ -15/6) \\ &= 0 \ 0 \ 0 \ 5/6 \ 1/2 \ 271/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= (2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 8) - (2) \cdot (1 \ 0 \ 0 \ -5/18 \ 1/6 \ 5/6) \\ &= (2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 8) - (2 \ 0 \ 0 \ -10/18 \ 2/6 \ 10/6) \\ &= 0 \ 0 \ 1 \ 5/9 \ -1/3 \ 6 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$X_2 =$ Baris lama, karena koefisien pada kolom kunci adalah 0

b. Masalah Minimasi (Biaya)

Langkah – langkah Penyelesaian

- Untuk langkah 1, 2 = maksimasi
- Langkah ke 3 : Pilihlah kolom yang mempunyai nilai pada garis fungsi tujuan yang bernilai negatif dengan angka terkecil
- Untuk langkah 4,5, dan 6 = maksimasi
- Langkah ke 7 : Ulangi langkah ke 3 s/d ke 6. Perubahan baru berhenti setelah “pada baris pertama” (fungsi tujuan) tidak ada yang bernilai positif.

SOAL LATIHAN

1. Sebuah toko perhiasan membuat kalung dan gelang dari emas dalam platinum. Toko tersebut telah mengembangkan model program linear untuk menentukan jumlah kalung dan gelang (X_1 dan X_2) yang akan dibuat dalam usaha memaksimumkan profit. Adapun persamaannya sebagai berikut:

Maksimumkan $Z = 300X_1 + 400X_2$ (profit)

Dengan batasan (1) $3X_1 + 2X_2 \leq 18$ (emas, ons)

(2) $2X_1 + 4X_2 \leq 20$ (platinum, ons)

(3) $X_2 \leq 4$ (permintaan, gelang)

Batasan non negatif: $X_1, X_2 \geq 0$

2. “Rahmat Taylor” membuat jaket dan celana panjang. Dua sumber daya yang dibutuhkan diantaranya adalah bahan wol dan tenaga kerja. “Rahmat Taylor” telah mengembangkan suatu model program linear untuk menentukan jumlah jaket dan beberapa pasang celana panjang (X_1 dan X_2) yang akan dibuat dalam usaha memaksimumkan profit. Adapun persamaannya sebagai berikut:

Maksimumkan $Z = 50X_1 + 40X_2$ (profit)

Dengan batasan (1) $3X_1 + 5X_2 \leq 150$ (wol, yard)

(2) $10X_1 + 4X_2 \leq 20$ (tenagakerja, jam)

Batasan non negatif: $X_1, X_2 \geq 0$

3. Perusahaan konveksi “Indah” memproduksi 2 buah produk, yaitu produk jaket dan kemeja. Beberapa persoalan yang perlu diperhatikan adalah:
- Untuk memproduksi kemeja, diperlukan 20 menit mesin I, 10 menit mesin II, 40 menit penghalusan, dan 20 menit proses finishing. Sedangkan untuk memproduksi jaket

Royal, Indra, dan Permata. Studi pemasaran menunjukkan bahwa pada harga-harga yang telah diproyeksikan sekarang, Perusahaan mampu menjual semua model yang diproduksi. Produksi Perusahaan hanya dibatasi oleh tersedianya bahan baku aluminium dan tenaga kerja. Jumlah aluminium, waktu produksi, dan perkiraan keuntungan per unit adalah sebagai berikut:

Model	Aluminium (Kg/1000)	Jam Produksi (Per 1000)	Keuntungan (Per Rp1000)
Royal	60	3	2.100
Indra	50	2	1.600
Permata	40	1	1.300
Jumlah yang tersedia setiap bulan	4000 Kg	144 Jam	

Bagaimana sebaiknya skedul produksi perusahaan untuk memaksimalkan keuntungan yang diharapkan ?

BAB



**METODE
TRANSPORTASI**



METODE TRANSPORTASI

A. PENDAHULUAN

Metode Transportasi (*Transportation*) merupakan bagian dari topik program linier yang secara khusus membahas tentang alokasi dari tempat asal ke tempat tujuan agar biaya alokasi/distribusi minimum.

Banyak sekali **kegunaan** dari metode transportasi, terutama dapat diaplikasikan dalam menyelesaikan masalah seperti:

- Skedul pengiriman dari pabrik ke lokasi gudang atau wilayah pemasaran.
- Penentuan lokasi pabrik.
- Penentuan daerah/wilayah penjualan
- Skedul produksi
- Penugasan karyawan/mesin
- Penempatan layout fasilitas/mesin
- Seleksi proyek maupun sub kontraktor, dan lain-lain.

Karakteristik dari metode transportasi :

1. Suatu barang dipindahkan dari sejumlah sumber ke tempat tujuan dengan biaya semimum mungkin.

2. Atas barang tersebut tiap sumber dapat memasok suatu jumlah yang tetap dan tiap tempat tujuan mempunyai jumlah permintaan yang tetap (permintaan pada setiap sumber harus dipenuhi tanpa melebihi kapasitas produksi pada setiap sumber).

Persyaratan yang perlu dipenuhi dalam penggunaan Metode Transportasi :

1. Tempat asal, yang dapat berupa pabrik, kapasitas produksi, karyawan, sumber dana, dan sebagainya sesuai dengan masalah yang dihadapi.
2. Tempat tujuan yang dapat berupa gudang wilayah pemasaran, skedul permintaan, pekerjaan, proyek, dan sebagainya.
3. Kapasitas tempat asal dan tempat tujuan.
4. Biaya dari tempat asal ke tempat tujuan.
5. Adanya keseimbangan kapasitas tempat asal dan tempat tujuan.

B. MODEL METODE TRANSPORTASI

Secara umum, model dalam permasalahan transportasi dapat digambarkan dalam suatu tabel yang menunjukkan sisi penawaran (asal) dan sisi permintaan (tujuan), kapasitas penawaran dan jumlah permintaan serta biaya transportasi dari masing-masing sumber ke masing-masing tujuan, sebagaimana dalam Tabel 3.1 dibawah ini:

Tabel 3.1. Model Transportasi

Tujuan Asal	T1	T2	T3	Kapasitas Pabrik
A ₁	X ₁₁ ^{c₁₁}	X ₁₂ ^{c₁₂}	X ₁₃ ^{c₁₃}	S ₁
A ₂	X ₂₁ ^{c₂₁}	X ₂₂ ^{c₂₂}	X ₂₃ ^{c₂₃}	S ₂
A ₃	X ₃₁ ^{c₃₁}	X ₃₂ ^{c₃₂}	X ₃₃ ^{c₃₃}	S ₃
Permintaan Penjualan	d ₁	d ₂	d ₃	

Formulasi Model Transportasi :

1. Fungsi tujuan (Z) : mewakili total biaya transportasi untuk tiap rute.
2. Tiga batasan I : mewakili Supply
3. Tiga batasan II : mewakili Demand

Dalam bentuk matematika, permasalahan transportasi tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

Fungsi tujuan: *Minimumkan* $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij}$

dengan batasan: $\sum_{j=1}^n X_{ij} = s_i$ *untuk* $i = 1, 2, \dots, m$

$\sum_{i=1}^m X_{ij} = d_j$ *untuk* $j = 1, 2, \dots, n$

$X_{ij} \geq 0$ *untuk semua* i *dan* j

Dimana:

Z = biaya total transportasi

X_{ij} = jumlah barang yang harus diangkut dari i ke j

- c_{ij} = biaya angkut per unit barang dari i ke j
- s_i = banyaknya barang yang tersedia di tempat asal i
- d_{ij} = banyaknya permintaan barang di tempat tujuan j
- m = jumlah tempat asal
- n = jumlah tempat tujuan

CONTOH:

1. Gandum di panen di Midwest dan disimpan dalam cerobong butir gandum ini memasok 3 (tiga) penggilingan tepung yang berlokasi di kota Chicago, Louis, dan Cincinnati. Butir-butir gandum tersebut dikirim ke penggilingan dengan menggunakan gerbong kereta api, yang tiap gerbongnya memuat satu ton gandum. Setiap bulannya, tiap cerobong butir gandum dapat memasok penggilingan sejumlah ton gandum berikut ini:

<i>Cerobong Butir Gandum</i>	<i>Jumlah yang ditawarkan</i>
1. Kansas City	150
2. Omaha	175
3. Des Moines	<u>275</u>
	600 ton

Jumlah gandum yang diminta per bulan dari tiap penggilingan adalah berikut ini:

<i>Penggilingan</i>	<i>Jumlah yang diminta</i>
A. Chicago	200
B. Louis	100
C. Cincinnati	<u>300</u>
	600 ton

Biaya pengiriman satu ton gandum dari tiap cerobong butir gandum (sumber) ke tiap penggilingan (tempat tujuan) berbeda-beda menurut jarak dan sistem jaringan kereta api.

Biaya-biaya ini ditunjukkan pada tabel dibawah ini:

Cerobong Butir Gandum	Biaya Penggilingan (\$)		
	Chicago A	Louis B	Cincinnati C
1. Kansas City	6	8	10
2. Omaha	7	11	11
3. Des Moines	4	5	12

Tentukan banyak gandum (ton) yang harus dikirim dari tiap cerobong butir gandum ke tiap penggilingan setiap bulannya agar total biaya transportasi minimum!

Jawab:

Formulasi model program linear untuk permasalahan ini adalah sebagai berikut:

Minimumkan: $Z = 6X_{1A} + 8X_{1B} + 10X_{1C} + 7X_{2A} + 11X_{2B} + 11X_{2C} + 4X_{3A} + 5X_{3B} + 12X_{3C}$

Dengan batasan: $X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} = 150$

$X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} = 175$

$X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} = 275$

$X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} = 200$

$X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} = 100$

$X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} = 300$

$X_{ij} \geq 0$

C. SOLUSI TRANSPORTATION PROBLEM

1. Solusi Layak Awal

Dapat ditentukan dengan 3 (tiga) metode alternatif, yaitu;

- a. Metode Northwerst Corner
- b. Metode Biaya Sel Minimum
- c. Metode Vogel's Aproximation

a. Metode Northwerst Corner

Metode ini merupakan metode yang paling sederhana di antara tiga metode yang lainnya.

Langkah-langkah penyelesaian:

- 1) Alokasi sebanyak mungkin ke sel di pojok kiri atas, disesuaikan dengan batasan permintaan (demand) dan penawaran (supply).
- 2) Alokasi sebanyak mungkin ke sel fisibel berikutnya yang berdekatan
- 3) Ulangi langkah ke-2 sampai semua kebutuhan terpenuhi.

Metode Northwerst Corner

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	150 ⁶	- ⁸	- ¹⁰	150
2	50 ⁷	100 ¹¹	25 ¹¹	175
3	- ⁴	- ⁵	275 ¹²	275
Permintaan	200	100	300	600

$$X_{1A} = 150 \quad X_{2A} = 175 \quad X_{2B} = 100 \quad X_{2C} = 25 \quad X_{3C} = 275$$

Ke dalam fungsi tujuan:

$$\begin{aligned} Z &= 6X_{1A} + 8X_{1B} + 10X_{1C} + 7X_{2A} + 11X_{2B} + 11X_{2C} + 4X_{3A} + 5X_{3B} \\ &\quad + 12X_{3C} \\ &= 6(150) + 8(0) + 10(0) + 7(50) + 11(100) + 11(25) + 4(0) + \\ &\quad 5(0) + 12(275) = \$ 5,925 \end{aligned}$$

b. Metode Biaya Sel Minimum

Metode ini berdasarkan pada konsep biaya minimum.

Langkah-langkah penyelesaian:

- 1) Alokasi sebanyak mungkin ke sel fisibel dengan biaya transportasi minimum, dan sesuaikan dengan kebutuhan.
- 2) Ulangi langkah 1 (satu) sampai semua kebutuhan telah terpenuhi.

Metode Biaya Sel Minimum

Alokasi Biaya Sel Minimum Awal

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6 -	8	10	150
2	7 -	11	11	175
3	4 200	5	12	275
Permintaan	200	100	300	600

Alokasi Biaya Sel Minimum Kedua

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6 -	8	10	150
2	7 -	11	11	175
3	4 200	5 75	12	275
Permintaan	200	100	300	600

Alokasi Biaya Sel Minimum Ketiga

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6 -	8 25	10 125	150
2	7 -	11 -	11 175	175
3	4 200	5 75	12 -	275
Permintaan	200	100	300	600

$$X_{1B} = 25 \quad X_{1C} = 125 \quad X_{2C} = 175 \quad X_{3A} = 200 \quad X_{3B} = 75$$

Ke dalam fungsi tujuan:

$$Z = 6X_{1A} + 8X_{1B} + 10X_{1C} + 7X_{2A} + 11X_{2B} + 11X_{2C} + 4X_{3A} + 5X_{3B} + 12X_{3C}$$

$$Z = 6(0) + 8(25) + 10(125) + 7(0) + 11(0) + 11(175) + 4(200) + 5(75) + 12(0) = \$ 4.550$$

c. Metode Vogel's Aproximation

Metode ini berdasarkan pada konsep biaya penalti.

Langkah-langkah penyelesaian:

- 1) a. Tentukan biaya penalti untuk tiap baris dengan cara mengurangi biaya sel terendah pada baris terhadap biaya sel terendah berikutnya pada baris yang sama.
b. Tentukan biaya penalti untuk tiap kolom dengan cara mengurangi biaya sel terendah pada kolom terhadap biaya sel terendah berikutnya pada kolom yang sama.
- 2) Pilih baris atau kolom dengan biaya penalti tertinggi.
- 3) Alokasi sebanyak mungkin ke sel fisibel dengan biaya transportasi terendah pada baris atau kolom dengan biaya penalti tertinggi.
- 4) Semua biaya penalti harus dihitung kembali, dengan menghilangkan biaya penalti tertinggi.
- 5) Ulangi langkah 1,2, 3, dan 4 sampai semua kebutuhan terpenuhi.

Metode Vogel's Approximation

Asal \ Tujuan	A	B	C	Pasokan
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4	5	12	275
Permintaan	200	100	300	600

2 (8-6)
4 (11-7)
1 (5-4)

2 (6-4) 3 (8-5) 1 (11-10)

Alokasi Vam Awal

Asal \ Tujuan	A	B	C	Pasokan
1	6	8	10	150
2	7 175	11 -	11 -	175
3	4	5 100	12	275
Permintaan	200	100	300	600

4 (10-6)

8(12-4)

2 (6-4)

2 (12-10)

Alokasi Vam Kedua

Asal \ Tujuan	A	B	C	Pasokan
1	6	8	10	150
2	7 175	11	11	175
3	4	5	12	275
Permintaan	200	100	300	600

2 (8-6)

1 (5-4)

2 (6-4)

3 (8-5)

2 (12-10)

Alokasi Vam Ketiga

Asal \ Tujuan	A	B	C	Pasokan
1	6	8	10 150	150
2	7 175	11 -	11 -	175
3	4 25	5 100	12 150	275
Permintaan	200	100	300	600

$$X_{1C} = 150 \quad X_{2A} = 175 \quad X_{3A} = 25 \quad X_{3B} = 100 \quad X_{3C} = 150$$

Ke dalam fungsi tujuan:

$$\begin{aligned} Z &= 6X_{1A} + 8X_{1B} + 10X_{1C} + 7X_{2A} + 11X_{2B} + 11X_{2C} + 4X_{3A} + \\ &\quad 5X_{3B} + 12X_{3C} \\ &= 6(0) + 8(0) + 10(150) + 7(175) + 11(0) + 11(0) + 4(25) + \\ &\quad 5(100) + 12(150) = \$ 5.125 \end{aligned}$$

2. Solusi Optimal

Setelah solusi awal ditentukan oleh salah satu dari ketiga metode diatas, langkah selanjutnya adalah menentukan solusi optimal.

Dapat ditentukan dengan 2 (dua) metode alternatif, yaitu;

- a. Metode Stepping Stone
- b. Metode Distribusi yang Dimodifikasi (MODI), pada dasarnya adalah suatu modifikasi dari metode stepping stone. Namun dalam metode MODI perubahan biaya pada sel ditentukan secara matematis, tanpa mengidentifikasi lintasan sel-sel kosong seperti pada metode stepping stone.

a. Metode Stepping Stone

Prinsip dasar : menentukan apakah suatu rute transportasi yang tidak digunakan pada saat ini (yaitu sebuah sel yang kosong) akan menghasilkan total biaya yang lebih rendah jika digunakan.

Langkah-langkah penyelesaian:

- 1) Tentukan solusi awal, dengan menggunakan satu dari ketiga metode yang tersedia.
- 2) Tentukan lintasan Stepping Stone dan perubahan biaya untuk tiap sel yang kosong dalam tabel.

- a. Mengevaluasi sel-sel kosong tersebut (dalam soal ini : sel IA, 2A, 2B, dan 3C) untuk mengetahui apakah dengan menggunakan sel-sel tersebut dapat menurunkan total biaya.
 - b. Untuk menentukan lintasan stepping stone, selalu dimulai dengan sel yang kosong dan membentuk suatu lintasan tertutup dari sel-sel yang telah dialokasikan.
 - c. Buat perubahan biaya dari pengalokasian.
- 3) Alokasikan sebanyak mungkin ke sel kosong yang menghasilkan penurunan biaya terbesar.
 - 4) Ulangi langkah 2, 3 dan 4 sampai semua sel kosong memiliki perubahan biaya positif yang mengindikasikan tercapainya solusi optimal.

Solusi Biaya Sel Minimum

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6	8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Permintaan	200	100	300	600

Alokasi Satu Ton ke Sel 1A

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6 25	8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Permintaan	200	100	300	600

Pengurangan Satu Ton dari Sel B

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	+1 6 25	-1 8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Permintaan	200	100	300	600

Penambahan Satu Ton ke Sel 3B dan Pengurangan Satu Ton dari Sel 3A

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	+1 6 25	-1 8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	-1 4 200	+1 5 75	12	275
Permintaan	200	100	300	600

$$1A \rightarrow 1B \rightarrow 3B \rightarrow 3A$$

$$\$6 - 8 + 5 - 4 = - \$1$$

Artinya : untuk setiap ton yang di alokasikan ke sel 1A (rute yang tidak digunakan sebelumnya), total biaya akan berkurang sebesar \$ 1.

Lintasan Stepping Stone untuk Sel 2A

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6	- ← 8	+ 10	150
2	+ ↑ 7	↓ 25	↑ 125	175
3	- ← 4	+ ↓ 5	12	275
Permintaan	200	100	300	600

$$2A \rightarrow 2C \rightarrow 1C \rightarrow 1B \rightarrow 3B \rightarrow 3A$$

$$\$7 - 11 + 10 - 8 + 5 = - \$1$$

Artinya : untuk setiap ton yang di alokasikan ke sel 2A (rute yang tidak digunakan sebelumnya), total biaya akan berkurang sebesar \$ 1.

Lintasan Stepping Stone untuk Sel 2B

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6	- ← 8	+ 10	150
2	+ ↑ 7	+ ↓ 25	↑ 125	175
3	- ← 4	+ ↓ 5	12	275
Permintaan	200	100	300	600

$$2B \rightarrow 2C \rightarrow 1C \rightarrow 1B$$

$$\$11 - 11 + 10 - 8 = +\$2$$

Artinya : untuk setiap ton yang di alokasikan ke sel 2B (rute yang tidak digunakan sebelumnya), total biaya akan bertambah sebesar \$ 1.

Lintasan Stepping Stone untuk Sel 3C

Tujuan / Asal	A	B	C	Pasokan
1	6	+ 8	- 10	150
2	7	11	175	175
3	4	- 5	+ 12	275
Permintaan	200	100	300	600

$$3C \rightarrow 1C \rightarrow 1B \rightarrow 3B$$

$$\$12 - 10 + 8 - 5 = +\$5$$

Artinya : untuk setiap ton yang di alokasikan ke sel 3C (rute yang tidak digunakan sebelumnya), total biaya akan bertambah sebesar \$ 5

Kita pilih sel 1A, karena mengurangi biaya sebanyak \$1:

Lintasan Stepping-stone untuk Sel 1A

Tujuan / Asal	A	B	C	Pasokan
1	+ 6	- 8	10	150
2	7	11	175	175
3	- 4	+ 5	12	275
Permintaan	200	100	300	600

Lintasan Stepping-stone untuk Sel 2A

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	- ← 6 25	8	+ ↑ 10 125	150
2	+ ↓ 7	11	- ↓ 11 175	175
3	4 175	5 100	12	275
Permintaan	200	100	300	600

$$2A \rightarrow 2C \rightarrow 1C \rightarrow 1A$$

$$\$7 - 11 + 10 - 6 = \$0$$

Lintasan Stepping-stone untuk Sel 1B

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	- → 6 25	8	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	+ ← 4 200	- ↓ 5 75	12	275
Permintaan	200	100	300	600

$$1B \rightarrow 3B \rightarrow 3A \rightarrow 1A$$

$$\$8 - 5 + 4 - 6 = \$1$$

Lintasan Stepping-stone untuk Sel 2B

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	- → 6 25	8	+ ↓ 10 125	150
2	7	+ ← 11 175	- ↓ 11	175
3	+ ← 4 200	- ↓ 5 75	12	275
Permintaan	200	100	300	600

$$2B \rightarrow 3B \rightarrow 3A \rightarrow 1A \rightarrow 1C \rightarrow 2C$$

$$\$11 - 5 + 4 - 6 + 10 - 11 = \$3$$

Lintasan Stepping-stone untuk Sel 3C

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	+ 6	8	- 10	150
2	7	11	11	175
3	- 4	5	+ 12	275
Permintaan	200	100	300	600

$$3C \rightarrow 3A \rightarrow 1A \rightarrow 1C$$

$$\$12 - 4 + 6 - 10 = \$4$$

Evaluasi dari keempat lintasan tersebut mengindikasikan tidak terdapat penurunan biaya, sehingga solusi yang di tunjukkan sudah optimal:

Solusi Optimal Alternatif

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4	5	12	275
Permintaan	200	100	300	600

b. Metode Distribusi yang Dimodifikasi (MODI)

Pada MODI, perubahan biaya pada sel ditentukan secara matematis tanpa mengidentifikasi lintasan sel-sel kosong seperti pada metode *stepping stone*.

Tambahan kolom sisi kiri dengan symbol u_i dan tambahan baris teratas dengan symbol v_j dalam MODI mewakili nilai-nilai kolom baris yang harus di hitung untuk semua sel berisi pengalokasian dengan menggunakan formula: $u_i + v_j = c_{ij}$
 Nilai c_{ij} merupakan biaya transportasi barang untuk sel ij .

Langkah-langkah:

- 1) Tentukan solusi awal menggunakan satu dari ketiga metode yang tersedia

Solusi Awal Biaya Sel Minimum

	v_j	$v_A =$	$v_B =$	$v_C =$	
u_i	Ke	A	B	C	Pasokan
u_1	Dari 1	6 25	8 125	10 175	150
u_2	2	7 200	11 75	11 12	175
u_3	3	4 200	5 100	12 300	275
	Permintaan	200	100	300	600

- 2) Hitung nilai u_i dan v_j untuk tiap baris dan kolom dengan menerapkan formula

$u_i + v_j = c_{ij}$ pada tiap sel yang telah memiliki alokasi.

$u_i + v_j = c_{ij} \longrightarrow$ untuk sel yang ada muatannya, yaitu

$X_{1B}; X_{1C}; X_{2C}; X_{3A}; X_{3B}$

$$X_{1B} : u_1 + v_B = 8$$

$$X_{1C} : u_1 + v_C = 10$$

$$X_{2C} : u_2 + v_C = 11$$

$$X_{3A} : u_3 + v_A = 4$$

$$X_{3B} : u_3 + v_B = 5$$

Terdapat lima persamaan dengan 6 variabel yang tidak diketahui. Untuk memecahkan persamaan ini, maka salah satu dari variabel yang tidak diketahui, diberi nilai nol.

Misalkan $u_1 = 0$.

$$X_{1B} : u_1 + v_B = 8$$

$$0 + v_B = 8$$

$$v_B = 8$$

$$X_{1C} : u_1 + v_C = 10$$

$$0 + v_C = 10$$

$$v_C = 10$$

$$X_{2C} : u_2 + v_C = 11$$

$$u_2 + 10 = 11$$

$$u_2 = 1$$

$$X_{3B} : u_3 + v_B = 5$$

$$u_3 + 8 = 5$$

$$u_3 = -3$$

$$X_{3A} : u_3 + v_A = 4$$

$$-3 + v_A = 4$$

$$v_A = 7$$

Persamaan untuk sel 3B dapat diselesaikan sebelum persamaan untuk sel 3A diselesaikan. Semua nilai u_i dan v_j dapat di substitusikan dalam Tabel di bawah ini:

	v_j	$v_A = 7$	$v_B = 8$	$v_C = 10$	
u_i	Ke				
	Dari	A	B	C	Pasokan
$u_1 = 0$	1	6	8 25	10 125	150
$u_2 = 1$	2	7	11	11 175	175
$u_3 = -3$	3	4 200	5 75	12	275
	Permintaan	200	100	300	600

- 3) Hitung perubahan biaya, k_{ij} untuk setiap sel kosong (X_{1A} ; X_{2A} ; X_{2B} ; X_{3C}) menggunakan formula: $c_{ij} - u_i - v_j = k_{ij}$.

$$X_{1A} : k_{1A} = c_{1A} - u_1 - v_A = 6 - 0 - 7 = -1$$

$$X_{2A} : k_{2A} = c_{2A} - u_2 - v_A = 7 - 1 - 7 = -1$$

$$X_{2B} : k_{2B} = c_{2B} - u_2 - v_B = 11 - 1 - 8 = +2$$

$$X_{3C} : k_{3C} = c_{3C} - u_3 - v_C = 12 - (-3) - 10 = +5$$

Kita pilih sel 1A, karena mengurangi biaya sebanyak \$1:

- 4) Alokasikan sebanyak mungkin ke sel kosong yang menghasilkan penurunan biaya bersih terbesar (k_{ij} yang paling negatif). Alokasikan sesuai dengan lintasan
- 5) Ulangi langkah 2 sampai 4, sampai semua nilai k_{ij} positif atau nol.

	v_j	$v_A = 6$	$v_B = 7$	$v_C = 10$	
u_i	Ke				
	Dari	A	B	C	Pasokan
$u_1 = 0$	1	⁶ 25	8	¹⁰ 125	150
$u_2 = 1$	2	⁷	11	¹¹ 175	175
$u_3 = -2$	3	⁴ 175	⁵ 100	¹²	275
	Permintaan	200	100	300	600

$$\begin{aligned}
 X_{1A} : u_1 + v_A &= 6 & X_{1C} : u_1 + v_C &= 10 & X_{2C} : u_2 + v_C &= 11 \\
 0 + v_A &= 6 & 0 + v_C &= 10 & u_2 + 10 &= 11 \\
 v_A &= 6 & v_C &= 10 & u_2 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{3A} : u_3 + v_A &= 4 & X_{3B} : u_3 + v_B &= 5 \\
 u_3 + 6 &= 4 & -2 + v_B &= 5 \\
 u_3 &= -2 & v_B &= 7
 \end{aligned}$$

Perubahan biaya untuk sel kosong, dihitung dengan menggunakan formula:

$$c_{ij} - u_i - v_j = k_{ij}.$$

$$X_{1B} : k_{1B} = c_{1B} - u_1 - v_B = 8 - 0 - 7 = +1$$

$$X_{2A} : k_{2A} = c_{2A} - u_2 - v_A = 7 - 1 - 6 = 0$$

$$X_{2B} : k_{2B} = c_{2B} - u_2 - v_B = 11 - 1 - 7 = +3$$

$$X_{3C} : k_{3C} = c_{3C} - u_3 - v_C = 12 - (-2) - 10 = +4$$

Solusi yang di tunjukkan pada Tabel di atas sudah optimal, karena tidak ada yang bernilai negatif.

D. Model Transportasi Tidak Seimbang

Persoalan yang tidak seimbang timbul apabila jumlah *supply* (penawaran) tidak sama dengan jumlah *demand* (permintaan), yang bisa terjadi karena berkurangnya permintaan atau bertambahnya permintaan yang tidak terantisipasi sebelumnya.

Contoh 1: Suatu model tidak seimbang (Permintaan > Penawaran)

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4	5	12	275
Permintaan	200	100	350	600

D = 650 > S = 600 → S ditambah 50 ton

Agar model menjadi seimbang, baris *dummy* ditugaskan untuk memasok penawaran sebesar 50 ton. Permintaan tambahan sebesar 50 ton yang tidak akan dipasok, akan dialokasikan ke sebuah sel dalam baris *dummy*. Biaya transportasi sel-sel dalam baris *dummy* bernilai 0 (nol), karena jumlah yang dialokasikan ke sel-sel tersebut bukan jumlah yang benar-benar dipindahkan tetapi jumlah yang permintaannya tidak terpenuhi. Sel-sel *dummy* ini sebenarnya adalah variabel pengurang.

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4	5	12	275
<i>Dummy</i>	0	0	0	50
Permintaan	200	100	350	650

Contoh 2: Suatu model tidak seimbang (Penawaran > Permintaan)

Tujuan Asal	A	B	C	Pasokan
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4	5	12	375
Permintaan	200	100	300	600

S = 700 > D = 600 → D ditambah 100 ton

Agar model menjadi seimbang, kolom *dummy* ditugaskan untuk memasok permintaan sebesar 100 ton.

Tujuan Asal	A	B	C		Pasokan
1	6	8	10	0	150
2	7	11	11	0	175
3	4	5	12	0	375
Permintaan	200	100	300	100	700

Selanjutnya ikuti langkah-langkah penyelesaian baik dengan metode solusi layak awal maupun solusi optimal.

SOAL LATIHAN

1. Suatu perusahaan beton memindahkan beton dari 3 (tiga) pabrik ke 3 (tiga) lokasi konstruksi. Kapasitas penawaran dari tiga pabrik, permintaan dari tiga lokasi, dan biaya transportasi per ton adalah sebagai berikut:

Pabrik	Lokasi konstruksi			Penawaran (Ton)
	A	B	C	
1	\$ 8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	3	9	10	80
Permintaan (Ton)	150	70	60	280

2. Matriks biaya berikut menunjukkan biaya transportasi (\$ per unit) diantara tiga sumber pasokan (I, II, III) dan empat lokasi pasar (1, 2, 3, 4) serta jumlah penawaran dan permintaannya (unit per minggu). Tentukan pola distribusi yang memberikan biaya terendah.

Sumber	Tujuan				Kapasitas Pabrik
	G1	G2	G3	G4	
I	80	60	50	20	590
II	70	50	60	50	830
III	50	50	50	70	750
Permintaan	470	550	630	390	

3. PT. XYZ akan melakukan pengiriman barang dari tiga buah pabriknya ke tiga gudang, seperti pada Tabel di bawah ini:

Pabrik	Gudang			Penawaran (Ton)
	A	B	C	
P1	\$ 80	85	145	10
P2	90	70	105	20
P3	100	60	115	30
Permintaan (Ton)	10	28	22	60

BAB



**METODE
PENUGASAN**



METODE PENUGASAN

A. PENDAHULUAN

Metode Penugasan adalah suatu model transportasi yang penawaran dari tiap sumber dan permintaan dari tiap tempat tujuannya adalah satu. Metode penugasan sering disebut sebagai jenis khusus dari model pemrograman linear, bertujuan untuk mengoptimalkan hasil yang akan dicapai, baik untuk meminimalkan biaya total atau waktu yang diperlukan untuk mengerjakan beberapa tugas, maupun untuk memaksimalkan hasil, misalnya hasil produksi dan keuntungan.

B. MASALAH MINIMASI

Metode yang berhubungan dengan penempatan para karyawan pada bidang yang tersedia agar biaya yang ditanggung dapat diminimumkan, atau waktu/jarak minimum.

Contoh :

Suatu perusahaan mempunyai 4 (empat) jenis pekerjaan yang berbeda untuk diselesaikan oleh 4 (empat) orang karyawan. Setiap orang mendapat pekerjaan yang berbeda. Biaya yang dikeluarkan

untuk setiap jenis tugas oleh masing-masing karyawan ditunjukkan oleh Tabel di bawah ini:

TIM	KARYAWAN			
	A	B	C	D
I	15	14	18	17
II	21	16	18	22
III	21	21	24	19
IV	22	18	20	16

Bagaimanakah Perusahaan mengatur tugas ke-4 (empat) karyawan sehingga biaya total untuk keseluruhan pekerjaan minimum?

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Menyusun total *opportunity cost table*, dengan cara: mengurangi nilai pada setiap baris dengan nilai yang terkecil pada baris tersebut.

TIM	KARYAWAN				
	A	B	C	D	
I	15	14	18	17	- 14
II	21	16	18	22	- 16
III	21	21	24	19	- 19
IV	22	18	20	16	- 16

TIM	KARYAWAN			
	A	B	C	D
I	1	0	4	3
II	5	0	2	6
III	2	2	5	0
IV	6	2	4	0

2. Lakukan pengurangan kolom dengan cara: mengurangi nilai pada setiap kolom dengan nilai yang terkecil pada kolom tersebut.

TIM	KARYAWAN			
	A	B	C	D
I	1	0	4	3
II	5	0	2	6
III	2	2	5	0
IV	6	2	4	0

-1 -0 -2 -0

TIM	KARYAWAN			
	A	B	C	D
I	0	0	2	3
II	4	0	0	6
III	1	2	3	0
IV	5	2	2	0

3. Tutup semua angka nol, dengan menarik garis horizontal dan vertikal, dengan jumlah garis yang paling efisien.

TIM	KARYAWAN			
	A	B	C	D
I	0	0	2	3
II	4	0	0	6
III	1	2	3	0
IV	5	2	2	0

Jumlah garis (3) tidak sama dengan jumlah baris/kolom (4).

4. Jika jumlah garis tersebut lebih kecil dari jumlah baris/kolom pada tabel, maka penugasan optimum belum dapat ditemukan.

Maka;

- Kurangi semua angka yang tidak tertutup garis dengan angka terkecil yang tidak tertutup.
- Tambahkan angka terkecil itu pada angka yang menepati posisi silang.
- Angka yang tertutup garis adalah TETAP.

TIM	KARYAWAN			
	A	B	C	D
I	0	0	2	4
II	4	0	0	7
III	0	1	2	0
IV	4	1	1	0

Jumlah garis (4) = jumlah baris/kolom (4).

5. Penugasan sudah optimum apabila **jumlah garis = jumlah baris/kolom**

6. Jika penugasan sudah optimum, beri tanda segi empat pada nilai 0 pada masing-masing baris/kolom.

TIM	KARYAWAN			
	A	B	C	D
I	0	0	2	4
II	4	0	0	7
III	0	1	2	0
IV	4	1	1	0

Kesimpulan dari penugasan ini sebagai berikut: (Lihat kembali pada tabel soal):

Pekerjaan	Karyawan	Biaya
I	B	14
II	C	18
III	A	21
IV	D	16
Jumlah		69

C. MASALAH MAKSIMASI

Model yang berhubungan dengan penugasan optimal dari bermacam-macam sumber yang produktif atau personalia, yang mempunyai tingkat efisiensi yang berbeda untuk tugas berbeda pula dengan tujuan tercapai hasil yang optimal. Dalam metode penugasan baik masalah maksimasi maupun minimasi penawaran dari tiap sumber dan permintaan dari tempat tujuan adalah satu.

Contoh :

Manajer pemasaran sebuah perusahaan, sedang mempelajari laporan penjualan dan mengevaluasi ke-5 (lima) tenaga penjualan. Setiap tenaga penjualan ditugaskan ke salah satu wilayah pemasaran selama tiga bulan mendatang. Masing-masing wilayah pemasaran mempunyai potensi penjualan sebagai berikut :

Wilayah utara	Rp. 100.000.000
Wilayah selatan	Rp. 80.000.000
Wilayah barat	Rp. 60.000.000
Wilayah timur	Rp. 45.000.000
Wilayah tengah	Rp. 40.000.000

Tabel berikut ini memperlihatkan probabilitas pencapaian potensi penjualan oleh masing-masing tenaga penjualan:

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran				
	Utara	Selatan	Barat	Timur	Tengah
A	0,10	0,20	0,40	0,40	0,30
B	0,15	0,30	0,80	0,20	0,50
C	0,20	0,25	0,85	0,30	0,60
D	0,15	0,30	0,50	0,40	0,70
E	0,30	0,50	0,60	0,70	0,45

Bagaimanakah manajer pemasaran mengatur tugas kelima tenaga penjualan agar diperoleh pencapaian potensi penjualan semaksimal mungkin?

Jawab: (dalam juta)

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran				
	Utara	Selatan	Barat	Timur	Tengah
A	10	16	24	18	12
B	15	24	48	9	20
C	20	20	51	13,5	24
D	15	24	30	18	28
E	30	40	36	31,5	18

Langkah-langkah penyelesaian :

1. Ambil nilai yang tertinggi pada Tabel dikurangi dengan nilai yang lain. Lakukan pengurangan kolom dengan cara: mengurangi nilai pada setiap kolom dengan nilai yang terkecil pada kolom tersebut. Kolom nilai tertinggi TETAP.

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran				
	Utara	Selatan	Barat	Timur	Tengah
A	10	16	24	18	12
B	15	24	48	9	20
C	20	20	51	13,5	24
D	15	24	30	18	28
E	30	40	36	31,5	18

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran				
	Utara	Selatan	Barat	Timur	Tengah
A	41	35	27	33	39
B	36	27	3	42	31
C	31	31	0	37,5	27
D	36	27	21	33	23
E	21	11	15	19,5	33
	-21	-11	tetap	-19,5	-23

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran				
	Utara	Selatan	Barat	Timur	Tengah
A	20	24	27	13,5	16
B	15	16	3	22,5	8
C	10	20	0	18	4
D	15	16	21	13,5	0
E	210	0	15	0	10

2. Lakukan pengurangan baris dengan cara: mengurangi nilai pada setiap baris dengan nilai yang terkecil pada baris tersebut. Baris nilai tertinggi TETAP.

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran					
	Utara	Selatan	Barat	Timur	Tengah	
A	20	24	27	13,5	16	-13,5
B	15	16	3	22,5	8	- 3
C	10	20	0	18	4	- 0
D	15	16	21	13,5	0	- 0
E	210	0	15	0	10	- 0

3. Untuk langkah selanjutnya sama dengan minimasi.

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran				
	Utara	Selatan	Barat	Timur	Tengah
A	-6,5	10,5	13,5	0	2,5
B	12	13	0	19,5	5
C	10	20	0	18	4
D	15	16	21	13,5	0
E	-0	0	15	0	10

Jumlah garis (4) tidak sama dengan jumlah baris/kolom (5).

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran				
	Utara	Selatan	Barat	Timur	Tengah
A	6,5	10,5	23,5	0	12,5
B	2	3	0	9,5	5
C	0	10	0	8	4
D	5	6	21	3,5	0
E	0	0	25	0	20

Kesimpulan dari penugasan ini sebagai berikut: (Lihat kembali pada Tabel soal):

Tenaga Penjual	Wilayah Pemasaran	Penjualan
A	Timur	18 juta
B	Barat	48 juta
C	Utara	20 juta
D	Tengah	28 juta
E	Selatan	40 juta
Jumlah		154 juta

D. JUMLAH PEKERJAAN TIDAK SAMA DENGAN JUMLAH KARYAWAN

Apabila jumlah pekerjaan tidak sama dengan jumlah karyawan, harus ditambahkan suatu baris/kolom semu (*dummy*) agar jumlah baris = jumlah kolom, membentuk tabel $n \times n$. Biaya pada baris/kolom semu ini = 0 (nol).

TIM	KARYAWAN				
	A	B	C	D	E
I	15	14	18	17	0
II	21	16	18	22	0
III	21	21	24	19	0
IV	22	18	20	16	0
V	32	30	32	35	0

Pada tabel di atas, setiap baris sudah memiliki sel bernilai nol, sehingga analisis langsung di lakukan untuk membuat setiap kolom memiliki paling tidak sebuah sel bernilai nol. Selanjutnya, dilakukan langkah-langkah penyelesaian metode penugasan pada contoh sebelumnya.

SOAL LATIHAN

1. Persatuan Bola Basket mengadakan 4 pertandingan bola basket pada suatu malam tertentu. Panitia mengirim 4 tim pendamping ke 4 pertandingan tersebut, sehingga total jarak yang harus ditempuh minimum. Adapun jarak tempuh tiap-tiap pendamping dapat dilihat pada Tabel dibawah ini:

TIM	LOKASI			
	A	B	C	D
I	210	90	180	160
II	100	70	130	200
III	175	105	140	170
IV	80	65	105	120

Bagaimanakah Panitia mengatur tugas ke-4 tim pendamping sehingga total jarak yang harus ditempuh minimum?

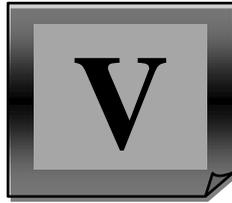
2. Pada Tabel di bawah ini menunjukkan kontribusi keuntungan yang diberikan oleh 5 (lima) orang karyawan A, B, C, D, E dalam menangani 5 (lima) jenis pekerjaan I, II, III, IV, V.

Pekerjaan	Karyawan				
	A	B	C	D	E
I	10	12	10	8	15
II	14	10	9	15	13
III	8	8	7	9	12
IV	13	15	8	16	11
V	10	13	14	11	17

3. Tabel berikut menunjukkan biaya penyelesaian kegiatan berdasarkan tim. Masing-masing tim hanya mengerjakan satu kegiatan. Kembangkan suatu rencana penugasan untuk mengalokasikan masing-masing tim pada kegiatan yang dapat meminimalkan biaya!

Kegiatan	Tim		
	A	B	C
1	45	50	54
2	60	65	53
3	40	49	48
4	77	53	68

BAB



***NETWORK
PLANNING***



NETWORK PLANNING

A. DEFINISI *NETWORK PLANNING*

Jaringan (network) adalah suatu susunan garis edar (*path*) yang menghubungkan berbagai titik, dimana satu barang atau lebih bergerak dari satu titik ke titik lain. Sebagai contoh, suatu jaringan rel kereta api terdiri dari sejumlah rute (garis edar) rel tetap yang dihubungkan oleh stasiun-stasiun pada pertemuan berbagai rute tersebut.

Sedangkan *network planning* merupakan analisis proses produksi dengan menggambarkan jaringan kerja, yang dapat memperhitungkan dan menentukan jalur kegiatan yang memerlukan pengendalian yang lebih cermat (yang merupakan jalur kritis).

B. KEUNTUNGAN ANALISIS JALUR KRITIS

Adapun keuntungan analisis jalur kritis adalah sebagai berikut:

1. Menggambarkan jaringan kerja dan ketergantungan kerja
2. Dapat diketahui kelemahan pada suatu jalur dan menghindari keterlambatan

3. Dapat memindahkan jalur yang lebih ekonomis
4. Dapat dipelajari kemungkinan percepatan waktu
5. Dapat diketahui waktu penyelesaian suatu pekerjaan.

C. LANGKAH-LANGKAH MENYUSUN JALUR KRITIS

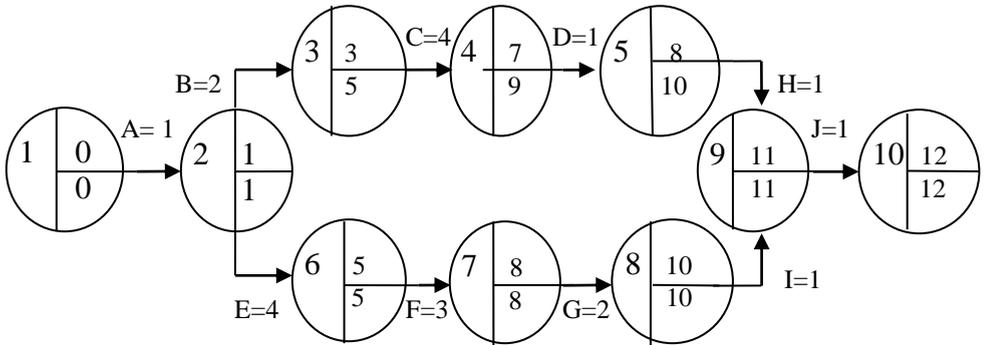
1. Menginventarisir kegiatan dalam proses dan memberikan nomor kegiatan
2. Mengetahui urutan kegiatan dalam proses
3. Menentukan ada/tidaknya kegiatan *dummy*
4. Memperhitungkan waktu yang digunakan oleh masing-masing kegiatan
5. Menentukan jalur kritis dan waktu kritis dari suatu kegiatan

D. BENTUK DIAGRAM NETWORK

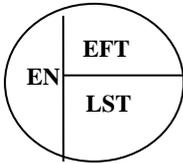
1. \longrightarrow (anak panah) aktifitas
2.  (lingkaran) suatu kejadian dimulai/berakhir suatu kegiatan
3. $-\ - - \rightarrow$ (anak panah terputus) *dummy activity*

Contoh:

No	Kegiatan	Kegiatan Sebelumnya	Waktu (Hari)
1.	A	-	1
2.	B	A	2
3.	C	B	4
4.	D	C	1
5.	E	A	1
6.	F	E	1
7.	G	F	3
8.	H	D	2
9.	I	G	1
10.	J	H,I	1



Dari jaringan diatas dapat dilihat bahwa pekerjaan tersebut dapat diselesaikan paling cepat dalam jangka waktu 12 hari.



Earliest Finished Time (EFT)

Adalah : waktu penyelesaian yang paling awal dapat diselesaikannya suatu pekerjaan tertentu.

EFT dapat dihitung dengan cara : menjumlahkan waktu kegiatan paling awal sampai pada kegiatan yang paling akhir, dengan memilih waktu yang terpanjang (nilai yang bercabang diambil nilai yang tertinggi)

Latest Start Time (LST)

Adalah : waktu mulai paling lambat dari suatu kegiatan agar pekerjaan dapat diselesaikan tepat pada waktunya.

LST dapat dihitung dengan cara : mengurangi waktu kegiatan paling akhir sampai pada kegiatan yang paling awal,

dengan memilih waktu yang terpendek (nilai yang bercabang diambil nilai yang terendah)

Jalur Kritis dan Waktu Kritis

- **Jalur Kritis** adalah kegiatan yang tidak ada slack antara kegiatan yang paling awal dapat diselesaikan (EFT) dengan kegiatan yang paling lambat harus dimulai (LST). Jadi : **EFT = LST**

Maka jalur kritis pada contoh diatas adalah 1, 2, 6, 7, 8, 9, dan 10

- **Waktu Kritis : EFT = LST**

Maka waktu kritis pada contoh diatas adalah 0, 1, 6, 8, 10, 11, dan 12

SOAL LATIHAN

1.

No	Kegiatan	Kegiatan Sebelumnya	Waktu (Hari)
1.	A	-	2
2.	B	-	3
3.	C	A	2
4.	D	A	4
5.	E	B	2
6.	F	C	3
7.	G	C	4
8.	H	D	4
9.	I	E	3
10.	J	F	2
11.	K	G	3
12.	L	H,I	2
13.	M	J,K	2
14.	N	L,M	2

- a. Buat diagram network dan berapa hari pekerjaan tersebut dapat diselesaikan?
- b. Tentukan jalur kritis dan waktu kritis!

2.

Kegiatan	Kegiatan Sebelumnya	Waktu (Hari)
A	-	2
B	-	3
C	-	2
D	A	4
E	B	2
F	C	3
G	C	4
H	D,E	4
I	F	3
J	G	2
K	H	3
L	I,J	2
M	K,L	2

- a. Buat diagram network dan berapa hari pekerjaan tersebut dapat diselesaikan?
- b. Tentukan jalur kritis dan waktu kritis!

BAB



PERT
***(Project Evaluation and Review
Technique)***



PERT

(Project Evaluation and Review Technique)

A. PENDAHULUAN

Penjadwalan Kerja, terbagi 2 (dua) yaitu :

1. CPM (*Critical Path Method*), merupakan metode garis edar kritis dengan teknik penentuan non probabilita.
2. PERT (*Project Evaluation and Review Technique*), yaitu teknik evaluasi dan pengkajian proyek, dengan menggunakan waktu aktivitas bersifat probabilita.

Baik CPM maupun PERT didasarkan pada diagram jaringan. Salah satu penggunaan jaringan yang paling populer adalah untuk analisa proyek. Jaringan-jaringan ini mengilustrasikan suatu cara dimana bagian-bagian dari proyek diorganisir, dan dapat digunakan untuk menentukan lamanya waktu proyek tersebut.

B. CPM (*Critical Path Method*)

CPM, menggunakan estimasi tunggal waktu aktivitas, dengan asumsi waktu aktifitas diketahui dengan pasti. Dalam kenyataannya jarang sekali estimasi waktu aktivitas tersebut dapat

dibuat dengan pasti. Sebagai alternatif bagi CPM, maka digunakanlah PERT.

C. PERT (*Project Evaluation and Review Technique*)

Dalam PERT ada 3 estimasi waktu, yaitu :

1. Waktu Optimistik (a), waktu kegiatan bila semuanya berjalan baik tanpa hambatan atau penundaan.
2. Waktu Realistik (m), waktu kegiatan yang akan terjadi bila suatu kegiatan dilaksanakan dalam kondisi normal, dengan penundaan tertentu yang dapat diterima.
3. Waktu Pesimistik (b), waktu kegiatan bila terjadi hambatan lebih dari semestinya.

Dari estimasi waktu tersebut diperoleh waktu kegiatan yang diharapkan (Expected Time / ET), dengan menggunakan rumus :

$$Et = \frac{a + 4(m) + b}{6}$$

Varians :

$$v = \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

Probabilitas Proyek

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

x = usulan waktu penyelesaian proyek

σ = standar deviasi

Langkah – langkah penyelesaian :

1. Tentukan Et.
2. Tentukan Varians.
3. Gambarkan diagram network, dan hitung waktu masing-masing kegiatan.
4. Tentukan jalur kritis, dan perkiraan waktu penyelesaian proyek tersebut.
5. Tentukan probabilitas proyek, dimana proyek dapat diselesaikan pada waktunya

Contoh:

Robert Wongso sebagai manajer produksi ditugaskan untuk memasang alat pendingin di dalam ruang operator mesin. Departemen produksi perusahaan telah menyediakan estimasi waktu kegiatan yang dapat dilihat dalam tabel berikut ini:

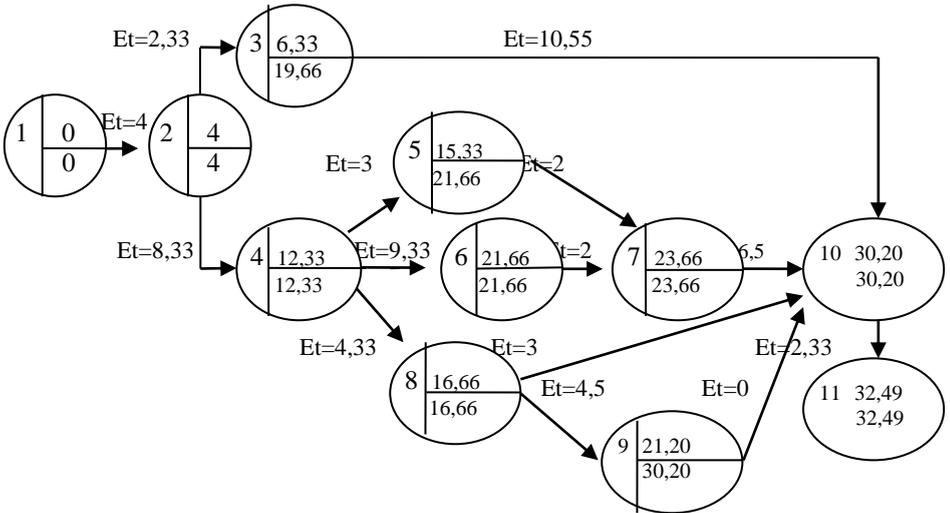
Kegiatan	Deskripsi	Waktu (Minggu)		
		a	m	b
1 – 2	Desain prosedur instalasi	2	4	6
2 – 3	Order alat pendingin	1	2	5
2 – 4	Mendapatkan kontraktor	2	8	16
4 – 5	Memperluas ruang operator	1	3	5
4 – 6	Memasang pipa dari sisi lain	4	8	20
5 – 7	Mengebor lantai	1	2	3
6 – 7	Memasang pipa dalam ruang operator	1	2	3
4 – 8	Memasang aliran	2	4	8
8 – 9	Memasang generator	1	4	10
3 – 10	Heat time alat pendingin baru	5	10	18
7 – 10	Menyambung pipa ke alat pendingin	3	6	12
8 – 10	Menyambung listrik ke alat pendingin	1	3	5
9 – 10	Kegiatan semu	0	0	0
10 – 11	Memperbaiki tembok	1	2	5

- a. Gambarkan diagram network dan hitung waktu masing-masing kegiatan!
- b. Tentukan jalur kritis dan perkiraan waktu penyelesaian proyek tersebut!
- c. Bila proyek tersebut dijadwalkan selama 25 minggu, berapa probabilitas proyek dapat diselesaikan tepat pada waktunya ?

Jawab:

Kegiatan	Deskripsi	Et
1 – 2	Desain prosedur instalasi	4
2 – 3	Order alat pendingin	2,33
2 – 4	Mendapatkan kontraktor	8,33
4 – 5	Memperluas ruang operator	3
4 – 6	Memasang pipa dari sisi lain	9,33
5 – 7	Mengebor lantai	2
6 – 7	Memasang pipa dalam ruang operator	2
4 – 8	Memasang aliran	4,33
8 – 9	Memasang generator	4,5
3 – 10	<i>Heat time</i> alat pendingin baru	10,5
7 – 10	Menyambung pipa ke alat pendingin	6,5
8 – 10	Menyambung listrik ke alat pendingin	3
9 – 10	Kegiatan semu	0
10 – 11	Memperbaiki tembok	2,33

a. Diagram *network*



b. Waktu kritis adalah 4; 12,33; 21,66; 23,66; 30,16; 32,49

Perkiraan waktu penyelesaian proyek 32,49 minggu

Aktivitas Garis Edar Kritis	Varians
1 – 2	0,44
2 – 4	5,44
4 – 6	7,11
6 – 7	0,11
7 – 10	2,25
10 – 11	0,44
Varians	15,78
Standar deviasi (σ)	3,97

c. Probabilitas proyek tersebut akan selesai dalam waktu 34 minggu

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{34 - 32,49}{3,97} = 0,38 \text{ (Lihat Tabel Distribusi Normal)}$$

→ 0,1480

Maka probabilitas proyek tersebut akan selesai dalam waktu 34 minggu adalah:

$$0,5 + 0,1480 = 0,648 = 64,8\%$$

SOAL LATIHAN

1. Perusahaan “AA” untuk meningkatkan kualitas syrup jagungnya, menggunakan komputer untuk pengendalian proses produksinya. Adapun kegiatan pemasangan komputer adalah sebagai berikut :

Kegiatan	Deskripsi	Waktu		
		a	m	b
1 - 2	Studi kelayakan	1	3	15
2 - 3	Perancangan sistem	3	4	11
2 - 4	Rancangan & prog kode pengendalian	2	6	10
3 - 5	Pengumpulan dan test data	2	6	13
4 - 5	Rancangan dan kode subroutine 1	4	5	12
4 - 6	Rancangan dan kode subroutine 2	3	6	9
5 - 7	Test subroutine 1	2	4	6
6 - 7	Test subroutine 2	1	4	7
7 - 8	Implementasi dan pemeliharaan sistem	2	3	10

Bila proyek tersebut dijadwalkan selama 25 minggu, berapa probabilitas proyek dapat diselesaikan tepat pada waktunya ?

2. Farmer’s American Bank of Leesburg berencana untuk memasang sebuah sistem rekening baru yang terkomputerisasi. Manajemen Bank telah menentukan estimasi waktu seperti yang ditunjukkan dalam tabel berikut ini:

Kegiatan	Waktu		
	a	m	b
1 - 2	1	3	5
1 - 4	4	6	10
1 - 6	20	35	50
2 - 3	4	7	12
3 - 4	2	3	5
4 - 7	8	12	25
4 - 8	10	16	21
4 - 5	5	9	15
3 - 9	6	8	14
6 - 8	1	2	2
6 - 13	5	8	12
8 - 10	5	10	15
8 - 11	4	7	10
9 - 13	5	7	12
11 - 12	5	9	20
12 - 13	1	3	7

Tentukan perkiraan lamanya waktu proyek dan varians serta probabilitas penyelesaian proyek tersebut dalam 67 hari!

BAB



VII

**TEORI PENGAMBILAN
KEPUTUSAN**



TEORI PENGAMBILAN KEPUTUSAN

A. PENDAHULUAN

Pengambilan keputusan merupakan suatu proses manajemen yang dimulai dengan perencanaan/persiapan dan berakhir dengan pengendalian. Untuk mendapatkan hasil yang baik, pengambilan keputusan seharusnya mengikuti tahapan pengambilan keputusan yang sistematis dan terkendali.

Tahapan dalam proses pengambilan keputusan adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah dan faktor-faktor yang berpengaruh.
Berupa identifikasi masalah secara jelas dan tepat mengetahui faktor-faktor yang menjadi penyebab dan mempengaruhi hasil keputusan.
2. Menetapkan tujuan dan criteria keputusan untuk memilih solusi.
Manajer harus menetapkan tujuan yang menjadi prioritas utama serta kriteria keberhasilan dan ukurannya secara obyektif.

3. Kembangkan model dengan beberapa alternatifnya.

Model dapat dibuat dalam bentuk fisik, skematik, atau matematik dan memuat unsur-unsur utama yang dapat mencerminkan keadaan nyata dan situasi yang diamati.

4. Analisis model dan bandingkan.

Tahap ini merupakan pengembangan penyelesaian masalah untuk mencari kemungkinan berbagai jenis solusi yang dapat diambil.

5. Pilih model terbaik.

Pilih solusi yang memenuhi kriteria yang telah ditetapkan dan realistis untuk diimplementasikan.

6. Terapkan model terpilih.

Tahap ini mencakup kegiatan memantau pelaksanaan keputusan untuk menjamin hasil yang dikehendaki tercapai.

B. MODEL UNTUK PENGAMBILAN KEPUTUSAN

Model merupakan abstraksi dari keadaan nyata, yang dibuat secara sederhana namun mengandung unsur-unsur utama dari suatu produk, proses atau system yang diwakili. Dengan menggunakan model, pengambilan keputusan dapat dilakukan dengan lebih praktis, murah, cepat, dan aman.

Model dalam pengambilan keputusan diklasifikasikan dalam 3 (tiga) bentuk, yaitu:

1. Model Fisik, yaitu model yang menggambarkan obyek aslinya.

Keuntungannya memberikan efek visual terhadap keadaan nyata dari benda itu.

2. Model Skematik, yaitu model yang dinyatakan dalam bentuk skema, diagram, grafik, atau gambar dari suatu obyek.
3. Model Matematika, yaitu model yang menggunakan symbol, rumus, atau persamaan yang menggambarkan proses atau sistem yang diwakili. Bila suatu model sudah dikembangkan, model harus diuji validitasnya terlebih dahulu sebelum digunakan. Dalam model matematika, uji validitas dilakukan sesuai dengan kaidah statistika.

Dalam bab ini, membahas model matematika sebagai alat bantu dalam proses pengambilan keputusan.

C. TEORI KEPUTUSAN

Teori keputusan adalah suatu pendekatan analitik untuk memilih alternatif terbaik dari suatu keputusan. Pada saat pengambilan keputusan, terdapat 3 (tiga) jenis kondisi/situasi yang dihadapi pengambil keputusan, yang diklasifikasikan berdasarkan tingkat kepastian dari hasil (*payoff*, *outcome*) yang akan terjadi.

Tiga jenis kondisi tersebut adalah:

1. Ketidakpastian : mengacu kepada situasi dimana terdapat lebih dari satu hasil yang mungkin terjadi dari suatu keputusan, dan probabilitas setiap kemungkinan tidak diketahui.
2. Beresiko : mengacu pada situasi dimana terdapat lebih dari satu hasil yang mungkin terjadi dari suatu keputusan, dan probabilitas setiap hasil diketahui atau dapat diperkirakan oleh pengambil keputusan.

3. Kepastian, mengacu kepada situasi dimana hanya ada satu hasil yang mungkin terjadi dari suatu keputusan, dan hasil ini diketahui secara tepat oleh pengambil keputusan.

Dalam hal ini tidak setiap teknik keputusan cocok untuk semua kondisi. Pada proses pengambilan keputusan, semua informasi yang diperlukan disusun dalam bentuk tabel yang disebut sebagai tabel hasil (*payoff table*) atau tabel keputusan.

Tabel hasil merupakan suatu matriks yang terdiri dari baris yang menunjukkan berbagai alternatif pilihan/keputusan, dan kolom yang menunjukkan nilai harapan untuk setiap alternative pilihan/keputusan pada berbagai kondisi yang mungkin terjadi. Nilai harapan menunjukkan keuntungan ekonomis (hasil bersih) yang diukur dalam nilai sekarang (*present value*)

Contoh :

Manajer suatu perusahaan kontraktor PT. XYZ sedang mempertimbangkan kemungkinan permintaan fasilitas kedepannya. Terdapat 3 (tiga) alternatif fasilitas yaitu besar, medium dan kecil. Satuan dalam jutaan rupiah, dinyatakan dalam nilai sekarang. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 7.1 dibawah ini:

Tabel 7.1. Tabel Hasil Permintaan PT. XYZ

Alternatif Fasilitas	Kemungkinan permintaan kedepan		
	Rendah	Sedang	Tinggi
Fasilitas besar	6	20	40
Fasilitas medium	9	28	38
Fasilitas kecil	15	15	15

1. Pengambilan Keputusan pada Kondisi Ketidakpastian.

Pengambilan keputusan pada kondisi ketidakpastian (*decision making under uncertainty*), mengasumsikan : pengambil keputusan tidak tahu dengan pasti hasil yang mungkin terjadi dari setiap alternatif, bahkan probabilitasnya sekalipun.

Terdapat 3 (tiga) kriteria pengambil keputusan, yaitu : *maximax*, *maximin*, dan sama rata.

Maximax (Keputusan Optimistik)

Kriteria : mencari hasil yang paling baik (maksimum) untuk setiap pilihan investasi, dan membuat keputusan berdasarkan nilai maksimum dari hasil maksimum tersebut (*maximax*).

Dalam contoh diatas, nilai hasil maksimum dari hasil alternatif fasilitas besar, medium, dan kecil, masing-masing secara berturut-turut adalah 40, 38, dan 15. Dengan kriteria *maximax* terpilih angka 40. Maka keputusan yang dipilih adalah permintaan fasilitas besar, dengan harapan mendapatkan hasil sebesar Rp 40 juta.

Alternatif Fasilitas	Kemungkinan permintaan kedepan		
	Rendah	Sedang	Tinggi
Fasilitas besar	6	20	40
Fasilitas medium	9	28	38
Fasilitas kecil	15	15	15

Maximin (Keputusan Pesimistik)

Kriteria : Mencari alternatif yang maksimum dari hasil yang minimum dari setiap alternatif.

Pertama, dicari hasil minimum dari setiap alternatif dan selanjutnya memilih alternatif dengan nilai terbesar dari yang terkecil tadi.

Dalam contoh diatas, nilai hasil minimum dari hasil alternatif fasilitas besar, medium, dan kecil, masing-masing secara berturut-turut adalah 6, 9, dan 15. Dengan kriteria *maximin* terpilih angka 15. Maka keputusan yang dipilih adalah permintaan fasilitas kecil, dengan harapan mendapatkan hasil sebesar Rp 15 juta.

Alternatif Fasilitas	Kemungkinan permintaan kedepan		
	Rendah	Sedang	Tinggi
Fasilitas besar	6	20	40
Fasilitas medium	9	28	38
Fasilitas kecil	15	15	15

Sama Rata

Kriteria sama rata (*equally likely*) atau kriteria *Laplace*, memilih alternatif dengan rata-rata hasil tertinggi. Dimulai dengan menghitung rata-rata hasil untuk setiap alternatif, kemudian dipilih alternatif yang memberikan nilai rata-rata yang maksimum. Dengan asumsi seluruh kemungkinan kejadian dianggap sama.

Dalam contoh diatas :

$$\text{Fasilitas besar : } 6 + 20 + 40 = 66/3 = 22$$

$$\text{Fasilitas medium : } 9 + 28 + 38 = 75/3 = 25$$

Fasilitas kecil : $15 + 15 + 15 = 45/3 = 15$

Nilai tertinggi dari ketiga nilai tersebut adalah 25. Dengan demikian, jika menggunakan kriteria *Laplace* akan dipilih permintaan fasilitas medium, yang memiliki nilai harapan sebesar Rp 25 juta.

Alternatif Fasilitas	Kemungkinan permintaan kedepan			Rata-rata
	Rendah	Sedang	Tinggi	
Fasilitas besar	6	20	40	22
Fasilitas medium	9	28	38	25
Fasilitas kecil	15	15	15	15

2. Pengambilan Keputusan pada Kondisi Beresiko.

Pengambilan keputusan pada kondisi beresiko (*decision making under risk*) mengasumsikan bahwa pengambil keputusan meskipun tidak tahu pasti hasil apa yang akan diperoleh dari setiap alternative, masih memiliki gambaran tentang probabilitas dari setiap kejadian. Dari kemungkinan itu pengambil keputusan dapat menghitung perkiraan hasil dari suatu alternatif.

Pendekatan yang paling banyak digunakan pada situasi ini adalah kriteria nilai harapan moneter (*expected monetary value/EMV*) atau biasa disebut nilai harapan/EV. EV menentukan harapan hasil untuk setiap alternatif, dan memilih alternatif dengan nilai harapan tertinggi. EV merupakan penjumlahan dari hasil untuk suatu alternatif dimana setiap hasil diberikan bobot

berdasarkan probabilitas untuk keadaan yang relevan. Jumlah bobot (probabilitas) harus sama dengan 1,00.

$$EV = \sum p_i \cdot H_i$$

Dimana :

p_i = probabilitas terjadinya kejadian i

H_i = hasil yang diperoleh dari kejadian i

Misalkan, alternatif kondisi ekonomi pada Tabel 7.1 memiliki probabilitas : tinggi = 0,6; sedang = 0,3; dan rendah = 0,1.

Maka diperoleh hasil EV untuk setiap alternatif sebagai berikut:

$$EV_{\text{fasilitas besar}} = 0,1(6) + 0,3(20) + 0,6(40) = 0,6 + 6 + 24 = 30,6$$

$$EV_{\text{medium}} = 0,1(9) + 0,3(28) + 0,6(38) = 0,9 + 8,4 + 22,8 = 32,1$$

$$EV_{\text{kecil}} = 0,1(15) + 0,3(15) + 0,6(15) = 1,5 + 4,5 + 9 = 15$$

Maka : dipilih kemungkinan permintaan kedepan pada **fasilitas medium**, karena memiliki harapan terbesar.

3. Pengambilan Keputusan dengan Kondisi Pasti.

Pada kondisi pasti, pengambil keputusan mengetahui dengan pasti hasil dari setiap alternatif keputusan yang diambil dan akan memilih alternatif yang akan memaksimalkan keinginannya.

Expected Value of Perfect Information (EVPI), merupakan perbedaan antara hasil yang diharapkan pada kondisi pasti dengan hasil yang diharapkan pada kondisi beresiko. Jika pengambil keputusan memiliki informasi keadaan apa yang dapat terjadi dari setiap alternatif maka dia dapat memilih keputusan yang sesuai

dengan harapannya. Nilai dari informasi itu disebut sebagai nilai harapan dari informasi sempurna (EVPI).

$$\mathbf{EVPI = EVUC - EV_{maks}}$$

$$\mathbf{EVUC = \sum p_i \cdot M_i}$$

Dimana:

EVUC = nilai harapan pada kondisi pasti (*expected value under certainty*)

EV_{maks} = nilai harapan maksimum

p_i = probabilitas terjadinya kejadian i

M_i = hasil terbaik pada kejadian i

EVUC adalah hasil yang diharapkan jika kita memiliki informasi sempurna sebelum keputusan diambil. Rumus EVUC = Rumus EV. Bedanya pada EVUC digunakan hasil terbaik pada setiap kejadian.

EVUC dari Tabel 7.1 dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{EVUC} &= \sum p_i \cdot M_i \\ &= 0,1 (15) + 0,3 (28) + 0,6 (40) \\ &= 1,5 + 8,4 + 24\end{aligned}$$

$$\mathbf{EVUC = 33,9}$$

EV_{maksimum} sudah dihitung sebelumnya = 32,1 maka:

$$\begin{aligned}\mathbf{EVPI} &= \mathbf{EVUC - EV_{maks}} \\ &= 33,9 - 32,1\end{aligned}$$

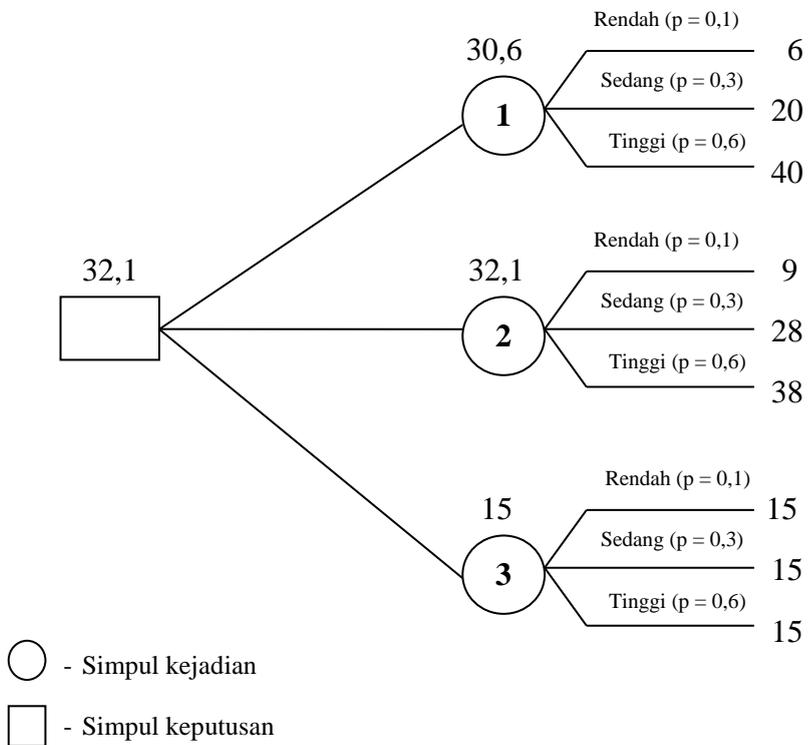
$$\mathbf{EVPI = 1,8}$$

Jadi : nilai harpan untuk informasi sempurna bernilai 1,8 juta.

D. POHON KEPUTUSAN

Pohon keputusan (*decision tree*) adalah gambaran skematik dari alternatif yang tersedia bagi pengambil keputusan dan kemungkinan hasilnya. Pohon keputusan memiliki fungsi yang sama dengan tabel keputusan.

Dari Tabel 7.1, dapat digambarkan dalam bentuk pohon keputusan, yaitu sebagai berikut:



Gambar 7.1. Pohon Keputusan Hasil Permintaan PT. XYZ

Analisis Pohon keputusan dimulai dari arah kanan ke kiri. Pada setiap simpul kejadian, dihitung nilai harapan dari alternatif yang bersangkutan. Pada simpul keputusan, dipilih satu alternatif

terbaik (nilai harapan tertinggi atau biaya terendah) dari berbagai alternatif yang ada pada simpul tersebut.

Dari pohon keputusan pada Gambar 7.1, dihitung nilai harapan simpul 1, 2, dan 3 sebagai berikut:

$$EV_1 = 0,1(6) + 0,3(20) + 0,6(40) = 0,6 + 6 + 24 = 30,6$$

$$EV_2 = 0,1(9) + 0,3(28) + 0,6(38) = 0,9 + 8,4 + 22,8 = 32,1$$

$$EV_3 = 0,1(15) + 0,3(15) + 0,6(15) = 1,5 + 4,5 + 9 = 15$$

Maka : dipilih kemungkinan permintaan kedepan pada **fasilitas medium**, karena memiliki EV terbesar.

SOAL LATIHAN

1. Tabel berikut merupakan tabel hasil yang menunjukkan hasil untuk setiap alternatif dari berbagai keadaan. Satuan dalam jutaan rupiah, dinyatakan dalam nilai sekarang. Tentukan alternatif yang harus dipilih berdasarkan kriteria maximax, maximin, dan Laplace.

Alternatif	Kemungkinan permintaan kedepan		
	Rendah	Sedang	Tinggi
Fasilitas besar	6	20	40
Fasilitas medium	9	20	25
Fasilitas kecil	15	15	15

2. Dalam rangka mengantisipasi permintaan tahun depan, manajer suatu perusahaan kontraktor bangunan sedang mempertimbangkan kapasitas yang harus disiapkan. Pendapatan pada tahun depan (dalam jutaan rupiah, nilai

sekarang) diperkirakan seperti pada tabel berikut. Alternatif apa yang harus dipilih, jika menggunakan kriteria maximax, maximin, dan sama rata.

Alternatif	Permintaan tahun depan	
	Tinggi	Rendah
Penambahan kapasitas	800	200
Menggunakan subkontraktor	700	400
Tetap dengan kondisi sekarang	600	500

3. Sebuah Swalayan menyelenggarakan suatu kupon belanja. Konsumen memilih uang kas sebesar Rp 100.000 atau memilih kupon. Jika memilih kupon, konsumen harus memilih satu dari tiga buah kupon yang masing-masing bernilai Rp 300.000, Rp 150.000 dan Rp 10.000.
 - a. Gambarkan pohon keputusan untuk kuis ini
 - b. Keputusan apa yang harus dibuat untuk memperoleh nilai harapan tertinggi.



TEORI ANTRIAN



TEORI ANTRIAN

A. PENDAHULUAN

Definisi **Antrian** yaitu Garis tunggu dari Nasabah yang di ukur dengan satuan tertentu yang memerlukan satu layanan atau lebih (fasilitas layanan).

Garis tunggu yaitu kemampuan atau kapasitas pelayanan. Terbentuknya garis tunggu di dalam sistem adalah karena fasilitas pelayanan sedang sibuk melayani pelanggan sehingga pelanggan yang datang harus menunggu.

Teori Antrian yaitu Suatu kejadian / garis tunggu yang di rumuskan secara matematika (menggunakan model)

Tujuannya :

- Merancang pelayanan optimal
- Menjaga keseimbangan biaya
- Menjaga keseimbangan waktu

B. ANALISA SISTEM ANTRIAN

Analisa antrian merupakan bentuk analisa probabilita, bukan teknik penentuan. Hasil dari analisa antrian disebut sebagai “karakteristik operasi”, bersifat probabilita. Statistik operasi ini

(seperti waktu rata-rata yang diperlukan seseorang untuk menunggu sampai dilayani) digunakan oleh manajer untuk mengambil keputusan dalam suatu operasi yang mengandung masalah antrian.

Ada 2 (dua) jenis sistem antrian yang paling umum digunakan untuk menganalisa sistem antrian yaitu **sistem pelayanan tunggal** (*single server system*) dan system pelayanan ganda (*multiple server system*).

C. SISTEM ANTRIAN PELAYANAN TUNGGAL

Pelayanan tunggal merupakan bentuk paling sederhana dalam sistem antrian yang digunakan untuk memperagakan dasar-dasar sistem antrian. Contoh: *Fast Shop Drive-In Market*, memiliki satu tempat kasir dan satu karyawan yang bertugas mengoperasikan mesin kas pada tempat kasir tersebut. Kombinasi antara mesin kas dan tempat kasir disebut **server** (fasilitas pelayanan), dan para pelanggan yang menunggu giliran pada tempat tersebut untuk membayar barang belanjaan membentuk suatu **barisan** atau **antrian**.

Adapun faktor-faktor yang harus dipertimbangkan dalam melakukan sistem antrian adalah:

1. **Disiplin antrian** (pada urutan ke berapa pelanggan di layani)
 - a. First Come – First Served (FCFS), pertama datang pertama dilayani.

Artinya: orang yang pertama berada dalam antrian di tempat kasir tersebut akan dilayani lebih dahulu.

- b. Last – in, first – out (LIFO), terakhir masuk pertama keluar.
Misalnya : Seorang operator mesin menyusun bagian-bagian yang sedang di proses di samping mesin sedemikian rupa, sehingga bagian terakhir diletakkan paling atas dan akan menjadi yang pertama dipilih.
- c. Serve In Random Order (SIRO)
Misalnya : Operator mesin mengambil salah satu bagian yang dikumpulkan dalam sebuah kotak secara acak.
- d. Berdasarkan jadwal, pelanggan akan dilayani sesuai dengan perjanjian yang telah dilakukan sebelumnya.
Misalnya : Pasien-pasien pada praktek dokter umum, maka akan diambil berdasarkan jadwal yang telah direncanakan tanpa tergantung oleh saat kedatangan mereka di tempat tersebut.

2. Sifat populasi pelanggan (dari mana pelanggan berasal)

Adalah : sumber atau alasan bagi pelanggan memilih suatu pasar, diasumsikan tidak terhingga (sumber pendatang ke tempat antrian).

3. Tingkat kedatangan (seberapa sering pelanggan ada dalam antrian), adalah jumlah kedatangan selama suatu periode waktu tertentu, dengan asumsi bahwa kedatangan pada suatu fasilitas jasa sesuai dengan distribusi probabilitas.

4. Tingkat pelayanan (seberapa cepat pelanggan dilayani), adalah rata-rata jumlah pelanggan yang dapat dilayani selama periode waktu tertentu. Waktu pelayanan, ditentukan oleh distribusi eksponensial.

ANTRIAN PELAYANAN TUNGGAL

λ = tingkat kedatangan (rata-rata jumlah kedatangan tiap periode waktu)

μ = tingkat pelayanan (rata-rata jumlah yang dilayani tiap periode waktu)

Dengan **asumsi**:

1. Populasi pelanggan (*Calling Population*) yang tidak terbatas
2. Disiplin antrian “ datang pertama, dilayani pertama”
3. Tingkat kedatangan Poisson
4. Waktu pelayanan eksponensial

Rumus :

- Probabilita tidak adanya pelanggan dalam suatu sistem antrian (baik sedang dalam antrian maupun sedang dilayani):

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

- Probabilita terdapat n pelanggan dalam suatu sistem antrian:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$$

- Rata-rata jumlah pelanggan yang berada dalam suatu sistem antrian (jumlah pelanggan yang dilayani dan yang berada dalam baris antrian):

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- Rata-rata jumlah pelanggan yang berada dalam baris antrian:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Waktu rata-rata yang dihabiskan seorang pelanggan dalam keseluruhan sistem antrian (yaitu waktu untuk menunggu dan dilayani):

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda}$$

- Waktu rata-rata yang dihabiskan seorang pelanggan untuk menunggu dalam antrian sampai dilayani :

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Probabilita bahwa pelayan sedang sibuk (merupakan probabilita seorang pelanggan harus menunggu), dikenal dengan *faktor utilitas* :

$$U = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Probabilita bahwa pelayan sedang tidak sibuk (merupakan probabilita seorang pelanggan dapat dilayani) :

$$I = 1 - U$$

$$I = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Contoh : $\lambda = 24$ pelanggan per jam yang datang.

$\mu = 30$ pelanggan per jam yang keluar.

maka :

- $P_0 = \left(1 - \frac{24}{30}\right)$
= 0,20 probabilita tidak adanya pelanggan dalam sistem tersebut.
- $L = \frac{24}{30 - 24} = \frac{24}{30 - 24}$
= 4 pelanggan secara rata-rata dalam sistem antrian tersebut.
- $L_q = \frac{(24)^2}{30(30 - 24)}$
= 3,2 pelanggan secara rata-rata dalam baris antrian.
- $W = \frac{1}{30 - 24}$
= 0,167 jam (0,167 x 60 menit = 10 menit) waktu rata-rata tiap pelanggan dalam sistem
- $W_q = \frac{24}{30(30 - 24)}$
= 0,133 jam (0,133 x 60 menit = 8 menit) waktu rata-rata tiap pelanggan dalam baris antrian
- $U = \frac{24}{30} = 0,80$ probabilita pelayan akan sibuk dan pelanggan harus menunggu
- $I = 1 - 0,80 = 0,20$ probabilita pelayan tidak sibuk dan pelanggan dapat dilayani

Data menambahkan :

- a. Berdasarkan harapan pelanggan, manager toko berpendapat bahwa pelanggan tidak mau menunggu selama 8 menit dan menghabiskan total waktu 10 menit dalam sistem antrian (belum termasuk waktu berbelanja). Manager ingin menguji alternatif I: **penambahan karyawan untuk mengepak barang belanjaan.**

Penambahan seorang karyawan akan menimbulkan biaya bagi manager toko sebesar **\$150 per minggu**. Manager tersebut menetapkan bahwa untuk setiap menit pengurangan waktu menunggu, ia terhindar dari kerugian penjualan sebesar **\$75 per minggu** (Toko tersebut mengalami kerugian jika pelanggan pergi sebelum sempat berbelanja karena panjangnya antrian atau jika pelanggan tidak kembali ke toko itu lagi). Penambahan karyawan baru akan meningkatkan tingkat pelayanan menjadi $\mu = 40$ pelanggan per jam. Dengan asumsi tingkat kedatangan sama ($\lambda = 24$ pelanggan per jam).

Jawab :

- $P_0 = 1 - \frac{24}{40} = \frac{16}{40} = 0,40$
- $L = \frac{24}{40 - 24} = \frac{24}{16} = 1,50$
- $L_q = \frac{24^2}{40(40 - 24)} = \frac{576}{640} = 0,90$
- $W = \frac{1}{40 - 24} = \frac{1}{16} = 0,0625$ (3,75 menit)

- $W_q = \frac{24}{40(40 - 24)} = \frac{24}{16} = 0,038 = 2,25 \text{ menit}$
- $U = \frac{24}{40} = 0,60$
- $I = 1 - 0,60 = 0,40$

Jadi :

Rata-rata waktu menunggu bagi tiap pelanggan adalah

(Wq) : $W_3 = 8 \text{ menit} - 2 \text{ menit} = 5,75 \text{ menit}$

$5,75 \times \$75 / \text{minggu} = \$ 431,25/\text{Minggu}$

$\mu = \$431,25 - \$150 = \$281,25/\text{Minggu}$

b. Manager ingin menguji alternatif II yaitu : **membuat tempat kasir baru**. Total proyek ini \$6,000 dengan biaya tambahan sebesar \$200 perminggu untuk kasir tambahan. Tempat kasir baru akan berada di depan tempat kasir lama (sehingga para karyawan akan saling membelakangi dalam suatu area). Manager tersebut menetapkan bahwa untuk setiap menit pengurangan waktu menunggu, ia terhindar dari kerugian penjualan sebesar **\$75 per minggu**. Diasumsikan bahwa para pelanggan akan terbagi dengan sendirinya dalam jumlah yang sama untuk tiap baris antrian, sehingga tingkat kedatangan untuk tiap baris sebesar setengah dari tingkat kedatangan awal untuk tempat kasir tunggal. Adapun tingkat kedatangan baru untuk setiap kasir adalah:

$\lambda = 12$ pelanggan per jam

dengan tingkat pelayanan yang sama untuk setiap tempat kasir:

$\mu = 30$ pelanggan per jam

Jawab:

- $P_0 = 1 - \frac{12}{30} = \frac{18}{30} = 0,60$
- $L = \frac{12}{30 - 12} = \frac{12}{18} = 0,67$
- $L_q = \frac{12^2}{30(30 - 12)} = \frac{144}{540} = 0,27$
- $W = \frac{1}{30 - 12} = \frac{1}{18} = 0,055$ jam (3,33 menit)
- $W_q = \frac{12}{30(30 - 12)} = \frac{12}{540} = 0,022$ jam (1,33 menit)
- $U = \frac{24}{40} = 0,60$
- $I = 1 - 0,60 = 0,40$

Jadi :

Rata-rata waktu menunggu bagi tiap pelanggan adalah:

(Wq) : $W_3 = 8$ menit – 1,33 menit = 6,67 menit

$6,67 \times \$75 / \text{minggu} = \$500,00 / \text{Minggu}$

$\mu = \$500,00 - \$200 = \$300 / \text{Minggu}$

Karena total proyek adalah sebesar \$6.000, maka dibutuhkan waktu $\$6000 : \$300 = 20$ Minggu untuk menutup biaya permulaan (bunga diabaikan).

Apabila biaya sudah berhasil ditutup, toko tersebut akan menghemat $\$300,00 - \$281,25 = \$18,75$ per Minggu lebih banyak dengan membuat tempat kasir baru dari pada menambah karyawan baru.

Tabel 7.1 menyajikan rangkuman karakteristik-karakteristik operasi untuk setiap alternatif sebagai berikut:

Tabel 7.1. Karakteristik Operasi Setiap Alternatif

Karakteristik Operasi	Sistem Sekarang	Alternatif I	Alternatif II
L	4,00	1,50	0,67
L_q	3,20	0,90	0,27
W	10,00	3,75	3,33
W_q	8,00	2,25	1,33
U	0,80	0,60	0,47

Bagi Manajer toko, kedua alternatif ini tampak lebih baik dari kondisi awal, yang menimbulkan waktu menunggu selama 8 menit per pelanggan.

D. SISTEM ANTRIAN PELAYANAN GANDA

λ = tingkat kedatangan (rata-rata jumlah kedatangan tiap periode waktu)

μ = tingkat pelayanan (rata-rata jumlah yang dilayani tiap periode waktu) per pelayanan (saluran)

c = jumlah pelayan

$c\mu$ = rata-rata tingkat pelayanan efektif sistem tersebut, dimana nilainya harus melebihi tingkat kedatangan

Dengan **asumsi**:

1. Populasi pelanggan (*Calling Population*) yang tidak terbatas
2. Disiplin antrian “ datang pertama, dilayani pertama”
3. Tingkat kedatangan Poisson
4. Waktu pelayanan eksponensial

Rumus:

- Probabilita tidak adanya pelanggan dalam sistem tersebut:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \right)}$$

- Probabilita terdapat n pelanggan dalam sistem tersebut:

$$P_n = \frac{1}{c!c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 \text{ untuk } n > c$$

$$P_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 \text{ untuk } n < c$$

- Rata-rata jumlah pelanggan dalam system antrian tersebut:

$$L = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^c}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

- Waktu rata-rata yang dihabiskan pelanggan dalam system antrian tersebut (untuk menunggu dan untuk dilayani):

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

- Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian tersebut:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

- Waktu rata-rata yang dihabiskan pelanggan dalam antrian menunggu untuk dilayani adalah:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

- Probabilita seorang pelanggan yang datang dalam sistem tersebut harus menunggu untuk dilayani (probabilita seluruh pelayan sibuk)

$$P_w = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} P_o$$

Contoh:

Sebuah penelitian atas bagian pelayanan pelanggan untuk periode 12 bulan menunjukkan bahwa tingkat kedatangan dan tingkat pelayanan adalah sebagai berikut:

$\lambda = 10$ pelanggan per jam yang datang ke bagian pelayanan

$\mu = 4$ pelanggan per jam dapat dilayani oleh setiap pelayan

Tambahan: sistem ini merupakan system antrian tiga pelayan (*tree server system*), oleh karena itu :

$c = 3$ pelayan pelanggan Toko

Dengan menggunakan rumus model pelayanan ganda, maka **karakteristik operasi** bagian pelayanan adalah:

- $$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda} \right)}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{0!} \left(\frac{10}{4} \right)^0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{10}{4} \right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{10}{4} \right)^2 \right] + \frac{1}{3!} \left(\frac{10}{4} \right)^3 \frac{3(4)}{3(4)-10}}$$

$$P_0 = \frac{1}{0 + 2,5 + 3,125 + (2,60.6)} = \frac{1}{21,225}$$

$P_0 = 0,047$ probabilita bahwa tidak ada pelanggan di bagian pelayanan

- $$L = \frac{\lambda \mu (\lambda / \mu)^c}{(c-1)! (c\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{(10)(4)(10/4)^3}{(3-1)!(3.4-10)^2} (0,045) + \frac{10}{4} = \frac{625}{8} (0,047) + 2,5$$

$L = 6$ pelanggan secara rata-rata dalam bagian pelayanan

- $$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{6}{10}$$

$W = 0,60$ jam (36 menit) rata-rata waktu per langganan di bagian pelayanan

- $$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 6 - \frac{10}{4}$$

$L_q = 3,5$ pelanggan secara rata-rata yang menunggu untuk dilayani

- $$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 0,60 - \frac{1}{4}$$

$W_q = 0,35$ jam (21 menit) rata-rata waktu menunggu per langganan dalam barisan

- $$P_w = \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \frac{c\mu}{c\mu - \lambda} P_0 = \frac{1}{3!} \left(\frac{10}{4} \right)^3 \frac{3.4}{3(4)-10} (0,047)$$

$P_w = 0,73$ probabilita seorang pelanggan harus menunggu untuk dilayani (terdapat 3 atau lebih pelanggan dalam sistem tersebut)

Berdasarkan harapan pelanggan, manager toko berpendapat bahwa pelanggan tidak mau menunggu selama 21 menit dan terdapat kemungkinan menunggu sebesar 0,73. Untuk itu Manajer mempertimbangkan penambahan seorang karyawan baru ($c = 4$). Jadi karakteristik operasi adalah:

$P_0 = 0,073$ probabilita tik ada pelanggan dalam bagian pelayanan

$L = 3,0$ pelanggan secara rata-rata dalam bagian pelayanan

$W = 0,30$ jam (18 menit) waktu rata-rata pelanggan dalam bagian pelayanan

$L_q = 0,5$ pelanggan secara rata-rata yang menunggu untuk dilayani

$W_q = 0,05$ jam (3 menit) waktu menunggu rata-rata per pelanggan dalam barisan

$P_w = 0,31$ probabilita seorang pelanggan harus menunggu untuk dilayani

Dengan mempertimbangkan biaya penambahan karyawan, maka terjadi penurunan waktu menunggu pelanggan dari 21 menit menjadi 3 menit.

SOAL LATIHAN

Petugas pelayanan rekening pinjaman baru pada citizens Northren Savings Bank mewawancara seluruh nasabah yang ingin membuka rekening pinjaman baru. Tingkat kedatangan para nasabah tersebut adalah 4 nasabah per jam berdasarkan distribusi Poisson, dan petugas rekening tersebut menghabiskan waktu rata-rata 12 menit untuk setiap nasabah yang ingin membuka rekening baru ($\mu = 60/12 = 5$ nasabah per jam)

- a. Tentukan karakteristik operasi untuk sistem ini (P_o , L , L_q , W , W_q , U , dan P_w)
- b. Berdasarkan harapan nasabah, manager berpendapat bahwa nasabah tidak mau menunggu selama 10 menit dan menghabiskan total waktu 12 menit dalam sistem antrian. Manager ingin menguji alternatif: **penambahan karyawan**. Penambahan seorang karyawan akan menimbulkan biaya bagi manager sebesar **\$280 per minggu**. Manager tersebut menetapkan bahwa untuk setiap menit pengurangan waktu menunggu, ia terhindar dari kerugian sebesar **\$120 per minggu**. Penambahan karyawan baru akan meningkatkan tingkat pelayanan menjadi $\mu = 7$ nasabah per jam. Dengan asumsi tingkat kedatangan sama ($\lambda = 4$ per jam).
- c. Tambahkan seorang karyawan baru pada system tersebut untuk menggambarkan masalah ini sehingga sistem tersebut menjadi system antrian pelayanan ganda dengan dua saluran, dan tentukan karakteristik operasi yang diminta pada bagian a (c=2)

DAFTAR PUSTAKA

- Herjanto, Eddy, *Manajemen Operasi*, Edisi ketiga , PT. Gramedia Widiasarana Indonesia, Jakarta, 2006
- Mulyono, Sri, *Operations Research*, Edisi kedua, Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, 1999
- Stevenson, William J., *Operations Management*, International Edition, McGraw-Hill Education (Asia), 2005
- Siswanto, *Operations Research*, Jilid I, Erlangga, Jakarta, 2007
- Siswanto, *Operations Research*, Jilid II, Erlangga, Jakarta, 2007
- Taylor III, Bernard. W, *Sains Manajemen*, Buku Satu, Edisi keempat, Salemba Empat, Jakarta, 1996
- Taylor III, Bernard W, *Sains Manajemen*, Buku Dua, Edisi Keempat, Salemba Empat, Jakarta, 1996
- Winston, Wayne. L, *Operations Research*, Thomson Learning, Australia 2004